Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

20/11/2025, Week 11

练习 1. 设函数 $f(x,y)=|x-y|g(x,y)$, 其中函数 g 在 $(0,0)$ 的邻域连续。

(1) 试确定函数 $g(x,y)$ 应满足的条件，使得 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ 存在；

(2) 在上述确定的条件下，试讨论函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 的可微性。

解答 1. (1) 由偏导数的定义计算 $f'_x(0,0)$:

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|g(x,0)}{x}.$$

考虑左右极限:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{xg(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}g(x,0)=g(0,0),$$
$$\lim_{x\to 0^-}\frac{-xg(x,0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}-g(x,0)=-g(0,0).$$

$f'_x(0,0)$ 存在的充要条件是左右极限相等，即 $g(0,0)=-g(0,0)$，从而 $g(0,0)=0$.

同理计算 $f'_y(0,0)$:

$$f'_y(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|-y|g(0,y)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{|y|g(0,y)}{y}.$$

左右极限分别为 $g(0,0)$ 和 $-g(0,0)$，存在的条件同样是 $g(0,0)=0$.

综上，函数 $g(x,y)$ 应满足的条件是 $g(0,0)=0$. 此时 $f'_x(0,0)=0$, $f'_y(0,0)=0$.

(2) 在条件 $g(0,0)=0$ 下，考察 f 在 $(0,0)$ 的可微性。根据可微性定义，需判断以下极限是否为零:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f'_x(0,0)x-f'_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

代入已知数值，该极限为:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{|x-y|g(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

注意到 $\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2$ (或者利用极坐标 $\frac{r|\cos\theta-\sin\theta|}{r}$ 有界)．即函数 $\frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是有界的。又因为 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续且 $g(0,0)=0$，所以 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$. 由“有界量与无穷小量的乘积仍为无穷小量”可知：

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x-y|}{\sqrt{x^2+y^2}} g(x,y) = 0.$$

因此，在条件 $g(0,0)=0$ 下，函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

练习 2. 假设 $a=(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $F\in C^1(\mathbb{R}^n)$ 且

$$F(x) = a\cdot\nabla F = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} F, \quad \forall x\in\mathbb{R}^n.$$

若存在常数 $K>0$ 使得 $|F(x)|<K$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$. 证明 $F(x)\equiv 0$.

解答 2. 若 $a=0$, 则方程直接给出 $F(x)=0$, 结论显然成立.

若 $a\neq 0$, 对任意固定的 $x\in\mathbb{R}^n$, 考虑定义在直线上的辅助函数 $g(t)=F(x+ta)$, 其中 $t\in\mathbb{R}$. 对 t 求导, 利用链式法则及题设条件 $a\cdot\nabla F(y)=F(y)$:

$$g'(t) = \nabla F(x+ta)\cdot\frac{d}{dt}(x+ta) = \nabla F(x+ta)\cdot a = F(x+ta) = g(t).$$

这是一个关于 $g(t)$ 的一阶线性常微分方程:

$$\frac{dg}{dt} = g.$$

其通解为 $g(t)=Ce^t$. 代入初始条件 $t=0$, 得 $C=g(0)=F(x)$. 故有关系式:

$$F(x+ta) = F(x)e^t, \quad \forall t\in\mathbb{R}.$$

由题设, F 有界, 即存在常数 $K>0$ 使得 $|F(y)|<K$ 对任意 $y\in\mathbb{R}^n$ 成立. 将此应用于上述关系式, 对任意 $t\in\mathbb{R}$ 有:

$$|F(x+ta)| = |F(x)|e^t < K.$$

令 $t\to+\infty$, 若 $|F(x)|>0$, 则 $\lim_{t\to+\infty}|F(x)|e^t=+\infty$, 这与 $|F(x+ta)|<K$ 矛盾. 因此必须有 $F(x)=0$. 由于 x 是任意选取的, 故 $F(x)\equiv 0$.

练习 3. 计算

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy.$$

解答 3. 交换积分次序. 积分区域为 $0 \le x \le 1$, $x \le y \le \sqrt{x}$. 注意到 y 从 0 到 1, 对于固定 y, x 满足 $y^2 \le x \le y$. 故

$$I = \int_0^1 \frac{\sin y}{y} dy \int_{y^2}^y dx = \int_0^1 \frac{\sin y}{y}(y - y^2) dy = \int_0^1 (1-y)\sin y \, dy.$$

计算得

$$\int_0^1 (1-y)\sin y \, dy = \big[-(1-y)\cos y\big]_0^1 - \int_0^1 \cos y \, dy = 1 - \sin 1.$$

练习 4. 假设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 连续且满足 $\int_{\mathbb{R}} f(t)dt = 1$. 如果区间 $I = [a, b]$ 在所有满足约束条件 $\int_c^d f(t)dt = \frac{1}{2}$ 的区间集中具有最小长度，即有

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{1}{2} \ \text{且}\ b - a = \min\Big\{d - c; \int_c^d f(t)dt = \frac{1}{2}\Big\}.$$

试分别利用隐函数存在定理，以及 *Lagrange* 乘数法给出如下断言的两个完全不同的证明：$f(a) = f(b)$.

解答 4. (1) **利用隐函数存在定理证明：**

定义函数 $G(c, d) = \int_c^d f(t)dt - \frac{1}{2}$. 根据题设，我们要在约束条件 $G(c, d) = 0$ 下，求目标函数 $L(c, d) = d - c$ 的极小值点 (a, b).

由于 f 连续且 $f > 0$，偏导数为：

$$\frac{\partial G}{\partial c} = -f(c), \quad \frac{\partial G}{\partial d} = f(d).$$

因为 $f(d) > 0$，根据隐函数存在定理，方程 $G(c, d) = 0$ 在 (a, b) 附近确定了一个可微函数 $d = d(c)$，满足 $G(c, d(c)) = 0$. (注意: 这里验证隐函数存在定理的适用条件需要利用到 $\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$, 更多的细节留给读者思考) 对该式关于 c 求导：

$$\frac{\partial G}{\partial c} + \frac{\partial G}{\partial d}\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}c} = 0 \implies -f(c) + f(d)\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}c} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}c} = \frac{f(c)}{f(d)}.$$

现在考虑目标函数 $L(c) = d(c) - c$. 由于 (a, b) 是极小值点，必有 $L'(a) = 0$.

$$L'(c) = \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}c} - 1 = \frac{f(c)}{f(d)} - 1.$$

令 $c = a, d = b$，则有

$$\frac{f(a)}{f(b)} - 1 = 0 \implies f(a) = f(b).$$

(2) **利用 Lagrange 乘数法证明：**

设目标函数为 $L(c,d)=d-c$，约束条件为 $g(c,d)=\int_c^d f(t)dt-\frac{1}{2}=0$. 构造 Lagrange 函数：

$$\mathcal{L}(c,d,\lambda)=(d-c)+\lambda\left(\int_c^d f(t)dt-\frac{1}{2}\right).$$

求偏导数并令其为零：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial c}&=-1+\lambda(-f(c))=-1-\lambda f(c)=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial d}&=1+\lambda f(d)=0,\\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}&=\int_c^d f(t)dt-\frac{1}{2}=0.\end{aligned}$$

在极值点 (a,b) 处，上述方程成立。由前两个方程可得：

$$\lambda f(a)=-1 \quad 且 \quad \lambda f(b)=-1.$$

由此推出 $\lambda f(a)=\lambda f(b)$. 由于 $f(t)>0$，必有 $\lambda\neq 0$ (否则 $-1=0$ 矛盾)，因此可以消去 λ，得到

$$f(a)=f(b).$$

练习 5. 设函数 $u=F(x,y,z)$ 在条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 之下在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 取得条件极值 m, 证明曲面 $F(x,y,z)=m,\varphi(x,y,z)=0,\psi(x,y,z)=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的法线共面，其中函数 $F,\varphi,\psi\in C^1(\mathbb{R}^3)$ 且在任一点处的梯度向量均非零。

解答 5. 根据 Lagrange 乘数法，若 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是函数 $F(x,y,z)$ 在约束条件 $\varphi(x,y,z)=0$ 和 $\psi(x,y,z)=0$ 下的极值点，且梯度向量 $\nabla\varphi(P_0)$ 与 $\nabla\psi(P_0)$ 线性无关（若线性相关，则结论显然成立，因为三个向量中两个共线，必然共面），则存在常数 λ,μ 使得在 P_0 点处满足：

$$\nabla F(P_0)+\lambda\nabla\varphi(P_0)+\mu\nabla\psi(P_0)=\mathbf{0}.$$

即

$$\nabla F(P_0)=-\lambda\nabla\varphi(P_0)-\mu\nabla\psi(P_0).$$

我们知道，曲面 $G(x,y,z)=c$ 在点 P 处的法向量平行于梯度向量 $\nabla G(P)$。因此，曲面 $F(x,y,z)=m$ 在 P_0 处的法向量为 $\mathbf{n}_F=\nabla F(P_0)$; 曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 在 P_0 处的法向量为 $\mathbf{n}_\varphi=\nabla\varphi(P_0)$; 曲面 $\psi(x,y,z)=0$ 在 P_0 处的法向量为 $\mathbf{n}_\psi=\nabla\psi(P_0)$。

上述 Lagrange 乘数法的结论表明，向量 $\mathbf{n}_F$ 可以表示为向量 $\mathbf{n}_\varphi$ 和 $\mathbf{n}_\psi$ 的线性组合。根据线性代数的知识，如果三个向量线性相关，或者其中一个向量可以由另外两个向量线性表示，则这三个向量共面。因此，三个曲面在点 P_0 处的法线共面。

练习 6. 考察方程 $x+\frac{y^2}{2}+\frac{z}{2}+\sin z=0$.

(1) 证明它在 $(0,0,0)$ 附近唯一确定了隐函数 $z=f(x,y)$.

(2) 写出 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处带 *Peano* 余项的二阶 *Taylor* 展开。

解答 6. (1) 令 $F(x,y,z)=x+\frac{y^2}{2}+\frac{z}{2}+\sin z$. 首先验证点 $(0,0,0)$ 满足方程:

$$F(0,0,0)=0+0+0+\sin 0=0.$$

其次, F 在 $\mathbb{R}^3$ 上显然是 C^∞ 的. 计算 F 对 z 的偏导数:

$$F_z=\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{1}{2}+\cos z.$$

在点 $(0,0,0)$ 处:

$$F_z(0,0,0)=\frac{1}{2}+\cos 0=\frac{3}{2}\neq 0.$$

根据隐函数存在定理, 方程 $F(x,y,z)=0$ 在 $(0,0,0)$ 的某个邻域内唯一确定了一个连续可微的函数 $z=f(x,y)$, 且满足 $f(0,0)=0$.

(2) 为了求 $z=f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 展开, 我们需要计算 $z_x,z_y,z_{xx},z_{xy},z_{yy}$ 在 $(0,0)$ 处的值.

对方程 $x+\frac{y^2}{2}+\frac{z}{2}+\sin z=0$ 两边关于 x 求导:

$$1+\frac{1}{2}z_x+(\cos z)z_x=0 \implies z_x(\frac{1}{2}+\cos z)=-1.$$

代入 $(x,y,z)=(0,0,0)$, 得 $z_x(0,0)\cdot\frac{3}{2}=-1$, 故 $z_x(0,0)=-\frac{2}{3}$.

对方程两边关于 y 求导:

$$y+\frac{1}{2}z_y+(\cos z)z_y=0 \implies z_y(\frac{1}{2}+\cos z)=-y.$$

代入 $(x,y,z)=(0,0,0)$, 得 $z_y(0,0)\cdot\frac{3}{2}=0$, 故 $z_y(0,0)=0$.

接着求二阶偏导数. 对 $z_x(\frac{1}{2}+\cos z)=-1$ 关于 x 求导:

$$z_{xx}(\frac{1}{2}+\cos z)+z_x(-\sin z)z_x=0.$$

代入 $(0,0,0)$ 及 $z_x=-\frac{2}{3}$:

$$z_{xx}\cdot\frac{3}{2}+(-\frac{2}{3})\cdot 0\cdot(-\frac{2}{3})=0 \implies z_{xx}(0,0)=0.$$

对 $z_x(\frac{1}{2}+\cos z)=-1$ 关于 y 求导:

$$z_{xy}(\frac{1}{2}+\cos z)+z_x(-\sin z)z_y=0.$$

代入数值:

$$z_{xy} \cdot \frac{3}{2} + (-\frac{2}{3}) \cdot 0 \cdot 0 = 0 \implies z_{xy}(0,0) = 0.$$

对 $z_y(\frac{1}{2} + \cos z) = -y$ 关于 y 求导:

$$z_{yy}(\frac{1}{2} + \cos z) + z_y(-\sin z)z_y = -1.$$

代入数值:

$$z_{yy} \cdot \frac{3}{2} + 0 = -1 \implies z_{yy}(0,0) = -\frac{2}{3}.$$

综上, $f(0,0) = 0$, $f_x(0,0) = -\frac{2}{3}$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{yy}(0,0) = -\frac{2}{3}$. 故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的二阶 Taylor 展开式为:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2] + o(x^2+y^2) \\ &= 0 - \frac{2}{3}x + 0 + \frac{1}{2}[0 + 0 - \frac{2}{3}y^2] + o(x^2+y^2) \\ &= -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y^2 + o(x^2+y^2). \end{aligned}$$

练习 7. 假设 $\alpha \in \mathbb{R}$. 考察函数 $f_\alpha(x,y) = x^3 - y^3 + 3\alpha xy$ 的极值点与极值。

解答 7. 首先求函数的驻点。计算一阶偏导数并令其为零:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 3\alpha y = 0 \implies x^2 + \alpha y = 0, \\ f_y(x,y) = -3y^2 + 3\alpha x = 0 \implies y^2 - \alpha x = 0. \end{cases}$$

情形 1: 若 $\alpha = 0$, 则方程组化为 $x^2 = 0, y^2 = 0$, 解得唯一驻点 $(0,0)$。此时 $f(x,y) = x^3 - y^3$。在 x 轴上 $f(x,0) = x^3$, 在 $x > 0$ 时为正, 在 $x < 0$ 时为负, 故 $(0,0)$ 不是极值点(是鞍点)。

情形 2: 若 $\alpha \neq 0$。由第一个方程得 $y = -\frac{x^2}{\alpha}$, 代入第二个方程得:

$$\left(-\frac{x^2}{\alpha}\right)^2 - \alpha x = 0 \implies \frac{x^4}{\alpha^2} - \alpha x = 0 \implies x(x^3 - \alpha^3) = 0.$$

解得 $x_1 = 0$ 或 $x_2 = \alpha$。当 $x_1 = 0$ 时, $y_1 = 0$, 得到驻点 $P_1(0,0)$。当 $x_2 = \alpha$ 时, $y_2 = -\frac{\alpha^2}{\alpha} = -\alpha$, 得到驻点 $P_2(\alpha, -\alpha)$。

接下来利用二阶偏导数判定极值。计算二阶偏导数:

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = 3\alpha, \quad f_{yy} = -6y.$$

Hessian 矩阵的行列式为:

$$H(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x)(-6y) - (3\alpha)^2 = -36xy - 9\alpha^2.$$

(i) 在点 $P_1(0,0)$ 处:

$$H(0,0) = -9\alpha^2 < 0.$$

故 $P_1(0,0)$ 是鞍点，不是极值点。

(ii) 在点 $P_2(\alpha,-\alpha)$ 处:

$$H(\alpha,-\alpha) = -36(\alpha)(-\alpha) - 9\alpha^2 = 36\alpha^2 - 9\alpha^2 = 27\alpha^2 > 0.$$

故 P_2 是极值点。极值类型取决于 $f_{xx}(\alpha,-\alpha) = 6\alpha$ 的符号。

- 若 $\alpha > 0$，则 $f_{xx} = 6\alpha > 0$，函数在 $(\alpha,-\alpha)$ 处取得极小值。极小值为:

$$f(\alpha,-\alpha) = \alpha^3 - (-\alpha)^3 + 3\alpha(\alpha)(-\alpha) = 2\alpha^3 - 3\alpha^3 = -\alpha^3.$$

- 若 $\alpha < 0$，则 $f_{xx} = 6\alpha < 0$，函数在 $(\alpha,-\alpha)$ 处取得极大值。极大值为:

$$f(\alpha,-\alpha) = -\alpha^3.$$

综上所述:

- 当 $\alpha = 0$ 时，无极值点。
- 当 $\alpha > 0$ 时，在 $(\alpha,-\alpha)$ 处取得极小值 $-\alpha^3$。
- 当 $\alpha < 0$ 时，在 $(\alpha,-\alpha)$ 处取得极大值 $-\alpha^3$。
- 点 $(0,0)$ 始终是鞍点。

练习 8.

(1) 说明下述反常积分存在并计算之:

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} \min\{x,y\} e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

(2) 判断下述反常重积分是否存在并证之:

$$J = \iint_{x,y\geq 1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dxdy.$$

解答 8. (1) 由对称性, 可将积分区域分为 $x \leq y$ 和 $x > y$ 两部分:

$$I = \iint_{x\leq y} xe^{-(x^2+y^2)} dxdy + \iint_{x>y} ye^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

由对称性, 两部分相等, 故

$$I = 2\iint_{x \le y} x e^{-(x^2+y^2)} dxdy.$$

在区域 $x \le y$ 上, y 从 $-\infty$ 到 ∞, x 从 $-\infty$ 到 y. 故

$$I = 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} x e^{-x^2} e^{-y^2} dxdy.$$

内层积分: $\int_{-\infty}^{y} x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_{-\infty}^{y} = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$. 于是

$$I = 2\int_{-\infty}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-y^2}\right)e^{-y^2}dy = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2y^2}dy = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

故 $I = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

(2) 考虑在矩形区域 $[1,R]\times[1,S]$ 上的积分:

$$J_{R,S} = \int_1^R\int_1^S \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dxdy.$$

先计算内层积分. 固定 y, 计算:

$$\int_1^R \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx.$$

注意到:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2)-x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

因此

$$\int_1^R \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = \left[-\frac{x}{x^2+y^2}\right]_1^R = -\frac{R}{R^2+y^2}+\frac{1}{1+y^2}.$$

再对 y 积分

$$J_{R,S} = \int_1^S\left(-\frac{R}{R^2+y^2}+\frac{1}{1+y^2}\right)dy = \left[-\arctan\left(\frac{y}{R}\right)+\arctan y\right]_1^S.$$

所以

$$J_{R,S} = \left(-\arctan\left(\frac{S}{R}\right)+\arctan S\right) - \left(-\arctan\left(\frac{1}{R}\right)+\arctan 1\right).$$

即

$$J_{R,S} = \arctan S - \arctan\left(\frac{S}{R}\right) + \arctan\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

现在考虑 $R,S\to\infty$ 的极限. 如果取 $R=S$, 则:

$$J_{R,R} = \arctan R - \arctan 1 + \arctan\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\pi}{4} = \arctan R - \frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

当 $R \to \infty$ 时，$\arctan R \to \frac{\pi}{2}$, $\arctan(1/R) \to 0$, 故

$$\lim_{R\to\infty} J_{R,R} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 0 - \frac{\pi}{4} = 0.$$

但如果取不同的路径, 例如令 $S = 2R$, 则

$$J_{R,2R} = \arctan(2R) - \arctan 2 + \arctan\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{\pi}{4}.$$

当 $R \to \infty$ 时，$\arctan(2R) \to \frac{\pi}{2}$, $\arctan(1/R) \to 0$, 故

$$\lim_{R\to\infty} J_{R,2R} = \frac{\pi}{2} - \arctan 2 + 0 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arctan 2.$$

由于 $\arctan 2 \neq \frac{\pi}{4}$, 此极限不为 0.

由于沿不同路径 (R, R) 和 $(R, 2R)$ 的极限不同, 故反常积分 J 不存在.

练习 9. 设 Ω 是由曲线 $\Gamma : \begin{cases} x^2 + z^2 = x \\ y = \sqrt{x^2 + z^2} \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周所成曲面 S 所围成的有界区域。

(1) 证明曲面 S 有如下表达式:

$$(x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 1 - 4z^2;$$

(2) 计算三重积分

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}dxdydz.$$

解答 9. (1) 设 Γ 上动点坐标为 (x_0, y_0, z_0). 由题设, 满足:

$$\begin{cases} x_0^2 + z_0^2 = x_0 & \cdots (1) \\ y_0 = \sqrt{x_0^2 + z_0^2} & \cdots (2) \end{cases}$$

由 (2) 得 $y_0^2 = x_0^2 + z_0^2$, 代入 (1) 得 $y_0^2 = x_0$.

设曲面 S 上任意一点为 (x, y, z). 由旋转曲面的定义, 该点由 Γ 上某点 (x_0, y_0, z_0) 绕 z 轴旋转得到, 故满足:

$$z = z_0, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}.$$

令 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. 则 $\rho^2 = x_0^2 + y_0^2$. 利用 $x_0 = y_0^2$, 有 $\rho^2 = x_0^2 + x_0$. 又由 (1) 知 $z^2 = x_0 - x_0^2$. 令 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + z^2$. 则

$$r^2 = (x_0^2 + x_0) + (x_0 - x_0^2) = 2x_0 \implies x_0 = \frac{r^2}{2}.$$

将 $x_0 = r^2/2$ 代入 $z^2 = x_0 - x_0^2$:

$$z^2 = \frac{r^2}{2} - \left(\frac{r^2}{2}\right)^2 = \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}.$$

整理得 $r^4 - 2r^2 + 4z^2 = 0$. 配方得 $(r^2-1)^2 - 1 + 4z^2 = 0$, 即

$$(r^2-1)^2 = 1 - 4z^2.$$

代入 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, 即得证.

(2) 采用球坐标变换: $x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$. 代入曲面方程 $(r^2-1)^2 = 1 - 4r^2\cos^2\theta$. 展开得 $r^4 - 2r^2 + 1 = 1 - 4r^2\cos^2\theta$, 化简得

$$r^2(r^2 - 2 + 4\cos^2\theta) = 0.$$

非平凡解为 $r^2 = 2 - 4\cos^2\theta$. 为使 r 有意义, 需 $2 - 4\cos^2\theta \geq 0$, 即 $\cos^2\theta \leq \frac{1}{2}$, 从而 $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}$. 积分区域 Ω 在球坐标下表示为:

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2 - 4\cos^2\theta}.$$

计算积分:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta d\theta \int_0^{\sqrt{2-4\cos^2\theta}} r \cdot r^2 dr \\
&= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2-4\cos^2\theta}} d\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta (2 - 4\cos^2\theta)^2 d\theta \\
&= 2\pi \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin\theta (1 - 2\cos^2\theta)^2 d\theta.
\end{aligned}$$

令 $u = \cos\theta$, $du = -\sin\theta d\theta$. 当 $\theta = \pi/4$ 时 $u = 1/\sqrt{2}$; 当 $\theta = 3\pi/4$ 时 $u = -1/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - 2u^2)^2 du = 4\pi \int_0^{1/\sqrt{2}} (1 - 4u^2 + 4u^4) du \\
&= 4\pi \left[u - \frac{4}{3}u^3 + \frac{4}{5}u^5\right]_0^{1/\sqrt{2}} \\
&= 4\pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) = 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{8}{15} = \frac{16\sqrt{2}\pi}{15}.
\end{aligned}$$