Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

27/11/2025, Week 12

练习 1 (利用对称性)**.**

(1) 求曲线积分

$$\int_{\mathcal{C}} e^{-(x^2+y^2)}[\cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \sin(2xy)\,\mathrm{d}y],$$

其中 $\mathcal{C}$ 是单位圆周, 方向为逆时针.

(2) 计算

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$L : x^2+y^2+z^2 = a^2,\ x+y+z=0.$$

解答 1. (1) 记 $P(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)$, $Q(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)$. 由于积分路径 $\mathcal{C}$ 是单位圆周 $x^2+y^2=1$, 在 $\mathcal{C}$ 上有 $x^2+y^2=1$, 于是

$$P|_{\mathcal{C}} = e^{-1}\cos(2xy), \quad Q|_{\mathcal{C}} = e^{-1}\sin(2xy).$$

原积分化为

$$I = e^{-1}\int_{\mathcal{C}} \cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \sin(2xy)\,\mathrm{d}y.$$

注意到被积函数关于原点中心对称. 具体地, 做变换 $x \to -x, y \to -y$, 路径 $\mathcal{C}$ 不变 (方向也不变), 但 $\mathrm{d}x \to -\mathrm{d}x, \mathrm{d}y \to -\mathrm{d}y$, 而 $\cos(2(-x)(-y)) = \cos(2xy)$, $\sin(2(-x)(-y)) = \sin(2xy)$. 这说明了该积分为 0.

(当然你也可以通过 Green 公式来验证这个事情) 令 D 为 $\mathcal{C}$ 所围成的单位圆盘. 根据格林公式:

$$\int_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

计算偏导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy)\right)\\ &= -2xe^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy) + 2ye^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy).\\ \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)\right)\\ &= -2ye^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy) - 2xe^{-(x^2+y^2)}\sin(2xy).\end{aligned}$$

相减得:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 4ye^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy).$$

于是

$$I = \iint_D 4ye^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

积分区域 D 关于 x 轴对称 (即 $y \to -y$), 被积函数 $f(x, y) = 4ye^{-(x^2+y^2)}\cos(2xy)$ 关于 y 是奇函数 (因为 y 是奇的, $x^2 + y^2$ 是偶的, $\cos(2xy) = \cos(-2xy)$ 是偶的). 因此, 该二重积分为 0.

$$\int_C e^{-(x^2+y^2)}[\cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \sin(2xy)\,\mathrm{d}y] = 0.$$

(2) 曲线 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 它是一个大圆, 半径为 a, 圆心在原点. 由于 x, y, z 在 L 上的地位是对称的, 故

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \int_L y^2\,\mathrm{d}s = \int_L z^2\,\mathrm{d}s.$$

因此

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s.$$

在曲线 L 上, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 是常数, 所以

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\int_L a^2\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\int_L \mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}.$$

因为 L 是半径为 a 的圆周, 其长度为 $2\pi a$. 所以

$$\int_L x^2\,\mathrm{d}s = \frac{a^2}{3}\cdot 2\pi a = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

练习 2 (曲线积分化为定积分)**.**

(1) 计算曲线积分

$$\int_L y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z,$$

这里

$$L: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=1,\ x,y,z\geqslant 0.$$

其中, $a,b,c>0$, 从点 $(a,0,0)$ 到点 $(0,0,c)$.

(2) 计算密度为常数 μ 的单层对数位势

$$u(x,y)=\oint_L \mu\ln\frac{1}{r}\,\mathrm{d}s,$$

这里 L 为圆周 $\xi^2+\eta^2=R^2$, 且 $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$.

解答 2. (1) 曲线 L 的参数方程为:

$$\begin{cases} x=at \\ y=b\sqrt{2}\sqrt{t-t^2} \\ z=c(1-t) \end{cases},\quad t \text{ 从1 变到0.}$$

这里我们先计算微分:

$$\mathrm{d}x=a\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z=-c\,\mathrm{d}t.$$

对于 y:

$$\mathrm{d}y=b\sqrt{2}\frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

代入积分表达式:

$$\begin{aligned} I&=\int_1^0\left[b\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}\cdot a+c(1-t)\cdot b\sqrt{2}\frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}+at\cdot(-c)\right]\mathrm{d}t \\ &=\int_1^0\left[ab\sqrt{2}\sqrt{t-t^2}+bc\sqrt{2}\frac{(1-t)(1-2t)}{2\sqrt{t-t^2}}-act\right]\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

经过繁复的计算, 我们有:

$$I=\frac{ac}{2}-\frac{\pi\sqrt{2}b(a+c)}{8}.$$

(2) 圆周 L 的参数方程为:

$$\xi=R\cos\theta,\quad \eta=R\sin\theta,\quad \theta\in[0,2\pi].$$

弧长元素 $\mathrm{d}s=R\,\mathrm{d}\theta$. 为了使得被积函数简化, 记 $x=\rho\cos\theta'$, $y=\rho\sin\theta'$, 则

$$r=\sqrt{R^2-2R\rho\cos(\theta-\theta')+\rho^2}.$$

于是

$$
\begin{aligned}
u(x,y) &= \oint_L \mu \ln \frac{1}{r}\, \mathrm{d}s \\
&= \int_0^{2\pi} \mu \left(-\frac{1}{2} \ln(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta')) \right) R\, \mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{\mu R}{2} \int_0^{2\pi} \ln(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta'))\, \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

由于被积函数是以 2π 为周期的, 积分区间长度为 2π, 我们可以令 $\phi=\theta-\theta'$, 积分值与 θ' 无关:

$$\int_0^{2\pi} \ln(R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\theta'))\, \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \ln(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

利用定积分公式:

$$\int_0^{2\pi} \ln(a^2+b^2-2ab\cos\phi)\, \mathrm{d}\phi = 4\pi \ln(\max\{a,b\}), \quad (a,b>0).$$

我们分情况讨论:

- 当 $\rho \le R$ 时 (点 (x,y) 在圆内或圆上), $\max\{R,\rho\}=R$, 积分值为 $4\pi\ln R$.

$$u(x,y) = -\frac{\mu R}{2} \cdot 4\pi \ln R = -2\pi\mu R \ln R.$$

- 当 $\rho > R$ 时 (点 (x,y) 在圆外), $\max\{R,\rho\}=\rho$, 积分值为 $4\pi\ln\rho$.

$$u(x,y) = -\frac{\mu R}{2} \cdot 4\pi \ln \rho = -2\pi\mu R \ln \rho = -2\pi\mu R \ln(x^2+y^2).$$

综上所述:

$$u(x,y) = \begin{cases} -2\pi\mu R\ln R, & x^2+y^2=\rho^2 \le R^2 \\ -2\pi\mu R \ln(x^2+y^2), & x^2+y^2=\rho^2 > R^2 \end{cases}.$$

补充: 关于积分公式

$$J = \int_0^{2\pi} \ln(a^2+b^2-2ab\cos\phi)\, \mathrm{d}\phi = 4\pi\ln(\max\{a,b\})$$

的证明. 由于被积函数是偶函数且周期为 2π, 我们有

$$J = 2\int_0^{\pi} \ln(a^2+b^2-2ab\cos\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

不妨设 $a,b>0$ 且 $a\neq b$. 定义函数

$$I(a) = \int_0^{\pi} \ln(a^2+b^2-2ab\cos\phi)\, \mathrm{d}\phi.$$

对参量 a 求导 (利用含参变量积分求导公式):

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{\pi} \frac{2a-2b\cos\phi}{a^2+b^2-2ab\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \frac{2a^2-2ab\cos\phi}{a^2+b^2-2ab\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\pi} \left(1+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2-2ab\cos\phi}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\pi}{a}+\frac{a^2-b^2}{a}\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}$$

利用常用积分公式 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{A+B\cos x}=\frac{\pi}{\sqrt{A^2-B^2}}$ (其中 $A^2>B^2$), 这里 $A=a^2+b^2, B=-2ab$, 于是 $\sqrt{A^2-B^2}=\sqrt{(a^2-b^2)^2}=|a^2-b^2|$.

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{a^2+b^2-2ab\cos\phi}\,\mathrm{d}\phi=\frac{\pi}{|a^2-b^2|}.$$

代回 $I'(a)$ 的表达式:

$$I'(a)=\frac{\pi}{a}+\frac{a^2-b^2}{a}\cdot\frac{\pi}{|a^2-b^2|}.$$

分情况讨论:

- 若 $a>b$, 则 $|a^2-b^2|=a^2-b^2$, 于是 $I'(a)=\frac{\pi}{a}+\frac{\pi}{a}=\frac{2\pi}{a}$. 积分得 $I(a)=2\pi\ln a+C_1$. 取 $b=0$ (或令 $a\to\infty$ 确定常数), $I(a)=\int_0^{\pi}\ln(a^2)\,\mathrm{d}\phi=2\pi\ln a$, 故 $C_1=0$. 即 $I(a)=2\pi\ln a$.
- 若 $a<b$, 则 $|a^2-b^2|=-(a^2-b^2)$, 于是 $I'(a)=\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{a}=0$. 即 $I(a)=C_2$ (常数). 取 $a=0$, $I(0)=\int_0^{\pi}\ln(b^2)\,\mathrm{d}\phi=2\pi\ln b$, 故 $C_2=2\pi\ln b$.

综上, $I(a)=2\pi\ln(\max\{a,b\})$. 最后回到原积分 $J=2I(a)=4\pi\ln(\max\{a,b\})$.

练习 3. 设 $f(x,y)$ 为一连续函数, L 是一封闭的逐段光滑曲线, 证明:

$$u(x,y)=\oint_L f(\xi,\eta)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}}\right)\mathrm{d}s$$

当 $x\to\infty$, $y\to\infty$ 时极限为 0 的充要条件是

$$\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0.$$

解答 3. 记 $P(x,y)$ 为平面上一点, $Q(\xi,\eta)$ 为曲线 L 上一点. 记 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. 当 $x\to\infty, y\to\infty$ 时, $\rho\to\infty$. 我们有

$$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2(x\xi+y\eta)+\xi^2+\eta^2}=\rho\sqrt{1-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}}.$$

于是

$$\ln\frac{1}{r}=-\ln r=-\ln\rho-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}\right).$$

代入 $u(x,y)$ 的表达式:

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\oint_L f(\xi,\eta)\left[-\ln\rho-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}\right)\right]\mathrm{d}s\\&=-\ln\rho\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\oint_L f(\xi,\eta)\ln\left(1-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}\right)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

记 $A=\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s$, 以及

$$I(x,y)=-\frac{1}{2}\oint_L f(\xi,\eta)\ln\left(1-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}\right)\mathrm{d}s.$$

由于 L 是逐段光滑的闭曲线 (事实上, 它是有界闭曲线, 这一点将曲线在某一区间上参数化即可看出), 则存在 $M>0$ 使得对于任意 $(\xi,\eta)\in L$, 有 $|\xi|\le M,|\eta|\le M$. 当 $\rho\to\infty$ 时,

$$|\delta|=|-\frac{2(x\xi+y\eta)}{\rho^2}+\frac{\xi^2+\eta^2}{\rho^2}|\leqslant\frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\rho^2}+\frac{2M^2}{\rho^2}=\frac{\sqrt{2}M}{\rho}+\frac{4M^2}{\rho^2}\to 0.$$

因此 $\ln(1+\delta)\to 0$ 关于 $(\xi,\eta)\in L$ 一致成立. 由于 $f(\xi,\eta)$ 在 L 上连续且 L 长度有限, f 有界, 故

$$\lim_{\rho\to\infty}I(x,y)=0.$$

于是我们有渐近关系:

$$u(x,y)=-A\ln\rho+o(1),\quad(\rho\to\infty).$$

($\Leftarrow$) 充分性: 若 $\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0$, 即 $A=0$. 则 $u(x,y)=I(x,y)$. 由前述分析知 $\lim_{\rho\to\infty}u(x,y)=0$.

($\Rightarrow$) 必要性: 若 $\lim_{\rho\to\infty}u(x,y)=0$. 假设 $A\neq 0$. 则 $u(x,y)=-A\ln\rho+I(x,y)$. 当 $\rho\to\infty$ 时, 第一项 $-A\ln\rho$ 的绝对值趋于无穷大, 而第二项 $I(x,y)$ 趋于 0. 这导致 $|u(x,y)|\to\infty$, 与已知条件矛盾. 因此必须有 $A=0$, 即 $\oint_L f(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s=0$.