Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

4/12/2025, Week 13

练习 1. 证明如下的不等式:

$$\Big|\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y\Big|\leqslant MC,$$

其中 C 是曲线 L 的弧长, $M=\max_{(x,y)\in L}\sqrt{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}$. 记圆周 $L_R: x^2+y^2=R^2$, 利用以上的不等式估计:

$$I_R:=\int_{L_R}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明 $\lim_{R\to+\infty} I_R=0$.

解答 1. 设曲线 L 由参数方程

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t)),\quad t\in[a,b]$$

给出, 其弧长为

$$C=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.$$

考虑线积分

$$I=\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int_a^b\left[P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt}+Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt}\right]dt.$$

取绝对值并应用柯西-施瓦茨不等式

$$|I|\leq\int_a^b\left|P\frac{dx}{dt}+Q\frac{dy}{dt}\right|dt\leq\int_a^b\sqrt{P^2+Q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.$$

则

$$|I|\leq M\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=M\cdot C.$$

对于积分 I_R, 路径 L_R 是圆周 $x^2+y^2=R^2$, 其长度 $C=2\pi R$. 这里 $P(x,y)=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}$, $Q(x,y)=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$. 我们需要估计 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 在 L_R 上的最大值.

$$\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{\sqrt{y^2+(-x)^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+xy+y^2)^2}=\frac{R}{(x^2+xy+y^2)^2}.$$

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

在圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上, 利用极坐标 $x=R\cos\theta, y=R\sin\theta$:

$$x^2+xy+y^2=R^2+R^2\cos\theta\sin\theta=R^2(1+\frac{1}{2}\sin(2\theta)).$$

因为 $-1\le\sin(2\theta)\le 1$, 所以

$$R^2(1-\frac{1}{2})\le x^2+xy+y^2\le R^2(1+\frac{1}{2}),$$

即

$$\frac{1}{2}R^2\le x^2+xy+y^2\le\frac{3}{2}R^2.$$

为了使 $\sqrt{P^2+Q^2}$ 最大, 分母 $(x^2+xy+y^2)^2$ 需要取最小值. 分母的最小值为 $(\frac{1}{2}R^2)^2=\frac{1}{4}R^4$. 于是

$$M=\max_{(x,y)\in L_R}\sqrt{P^2+Q^2}=\frac{R}{\frac{1}{4}R^4}=\frac{4}{R^3}.$$

利用第一部分的不等式:

$$|I_R|\le M\cdot C=\frac{4}{R^3}\cdot 2\pi R=\frac{8\pi}{R^2}.$$

当 $R\to+\infty$ 时, $\frac{8\pi}{R^2}\to 0$, 根据夹逼定理,

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0.$$

练习 2. 设 $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 在开区域 D 内处处连续可微, 并且在 D 内任一圆周 C 上有:

$$\oint_C\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=0,$$

其中 $\vec{n}$ 是圆周外法线单位向量. 证明: 在 D 内恒有:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0.$$

解答 2. 由于 $\vec{n}$ 是外法线单位向量, 所以

$$\vec{n}=\cos(\vec{n},x)\vec{i}+\cos(\vec{n},y)\vec{j}.$$

因此

$$\oint_C\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\oint_C\left[P(x,y)\cos(\vec{n},x)+Q(x,y)\cos(\vec{n},y)\right]\mathrm{d}s=\oint_C P(x,y)dy-Q(x,y)dx.$$

因此

$$0=\oint_C\vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}s=\oint_C P(x,y)dy-Q(x,y)dx=\iint_\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

记

$$g(x,y)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}.$$

下面用反证法证明 $g(x,y)\equiv 0$. 假设存在一点 $M_0(x_0,y_0)\in D$ 使得 $g(x_0,y_0)\neq 0$. 不妨设 $g(x_0,y_0)>0$. 根据连续函数的保号性, 存在 M_0 的一个邻域 (我们可以取为一个半径足够小的圆盘) $D_\epsilon\subset D$, 使得对于任意 $(x,y)\in D_\epsilon$, 都有 $g(x,y)>0$. 根据积分的单调性:

$$\iint_{D_\epsilon} g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y>0.$$

这与已知条件 (任意圆盘上的二重积分为 0) 相矛盾. 同理, 若假设 $g(x_0,y_0)<0$, 也会得出 $\iint_{D_\epsilon} g\,\mathrm{d}\sigma<0$, 同样导致矛盾. 因此, 在 D 内恒有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\equiv 0.$$

练习 3. 设 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 在开区域 D 内处处连续可微, 并且在 D 内任一闭曲面 S 上有:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\vec{n}$ 是曲面外法线单位向量. 证明: 在 D 内恒有:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0.$$

解答 3. 根据高斯公式, 对于 D 内任意闭曲面 S 及其所围成的区域 $\Omega\subset D$, 有:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

记散度 $\operatorname{div}\vec{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$. 已知对于任意闭曲面 S, 左边的曲面积分为 0, 故对于任意 $\Omega\subset D$, 都有:

$$\iiint_\Omega \operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V=0.$$

下面用反证法证明 $\operatorname{div}\vec{F}\equiv 0$. 假设存在一点 $M_0\in D$ 使得 $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)\neq 0$. 不妨设 $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)>0$. 由于 $\vec{F}$ 连续可微, 其散度 $\operatorname{div}\vec{F}$ 是连续函数. 根据连续函数的保号性, 存在 M_0 的一个邻域 (例如一个小球体) $\Omega_\epsilon\subset D$, 使得对于任意 $M\in\Omega_\epsilon$, 都有 $\operatorname{div}\vec{F}(M)>0$. 根据重积分的单调性:

$$\iiint_{\Omega_\epsilon}\operatorname{div}\vec{F}\,\mathrm{d}V>0.$$

这与已知条件 (任意区域上的体积分为 0) 相矛盾. 同理, 若假设 $\operatorname{div}\vec{F}(M_0)<0$, 也会得出矛盾. 因此, 在 D 内恒有:

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0.$$

练习 4. 试着举一例子说明: 第二类曲线积分中, 中值定理并不成立.

解答 4. 考虑闭曲线积分

$$I = \oint_L -y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 取逆时针方向.

直接计算该积分: 取参数方程 $x = \cos\theta, y = \sin\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

$$I = \int_0^{2\pi} [-\sin\theta \cdot (-\sin\theta) + \cos\theta \cdot \cos\theta]\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

如果第二类曲线积分的中值定理成立, 即存在曲线上一点 $M(\xi, \eta) \in L$, 使得

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = P(\xi,\eta)\int_L \mathrm{d}x + Q(\xi,\eta)\int_L \mathrm{d}y.$$

对于闭曲线 L, 坐标的增量为零, 即:

$$\int_L \mathrm{d}x = \oint_L \mathrm{d}x = 0, \quad \int_L \mathrm{d}y = \oint_L \mathrm{d}y = 0.$$

根据上述中值定理公式, 积分值应为:

$$I = (-\eta)\cdot 0 + (\xi)\cdot 0 = 0.$$

这与直接计算得到的 $I = 2\pi \neq 0$ 矛盾. 因此, 第二类曲线积分的中值定理一般不成立.

练习 5. 证明: 若 S 为封闭的光滑曲面, $\vec{l}$ 为任一固定的向量, 试证明:

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l})\,\mathrm{d}S = 0,$$

其中 $\vec{n}$ 是 S 的外法线单位向量.

解答 5. 设 $\vec{u} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$ 为向量 $\vec{l}$ 方向上的单位向量. 则

$$\cos(\vec{n}, \vec{l}) = \frac{\vec{n}\cdot\vec{l}}{|\vec{l}|}.$$

不妨设 $\vec{l} = (a, b, c)$ 为常向量. 则

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l})\,\mathrm{d}S = \frac{1}{|\vec{l}|}\iint_S (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\,\mathrm{d}S,$$

其中 $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 为外法线方向余弦. 将曲面积分转换为第二类曲面积分:

$$\iint_S (a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma)\,\mathrm{d}S = \iint_S a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

设 S 所围成的空间区域为 Ω. 根据高斯公式:

$$\iint_S a\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + b\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + c\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}\right)\mathrm{d}V.$$

由于 a, b, c 均为常数, 偏导数均为 0, 故

$$\iiint_\Omega (0+0+0)\,\mathrm{d}V = 0.$$

因此原积分等于 0.

练习 6.

(1) 证明平面上的 Green 第一公式:

$$\iint_D (v\Delta u + \nabla v \cdot \nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

其中 D 是平面上的有界闭区域, L 是区域 D 的边界光滑曲线, $\frac{\partial}{\partial n}$ 是曲线 L 的外法线方向的方向导数.

(2) 证明平面上的第二 Green 公式:

$$\iint_D v\Delta u - u\Delta v\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

(3) 若函数 $u(x, y)$ 是区域 D 上的调和函数, 则

(3.a) 设 (x, y) 是区域 D 上某点, (ξ, η) 是 L 上某动点, 记 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 是两者间的距离, 则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \left(u\frac{\partial}{\partial n}\ln r - \ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

(3.b) $\forall (x, y) \in D$, 以 (x, y) 为中心在 D 内的圆周 C_r (半径为 r), 则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u(\xi, \eta)\,\mathrm{d}s.$$

(4) u 是区域 D 上的调和函数, 那么 u 在区域 D 上的最大值和最小值均出现在边界 L 上.

解答 6. (1) 取 $P = -v\frac{\partial u}{\partial y}$, $Q = v\frac{\partial u}{\partial x}$. 根据格林公式:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

计算左边二重积分的被积函数, 利用乘积求导法则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v_x u_x + v u_{xx}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\left(\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=-v_yu_y-vu_{yy}.$$

相减得到:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=(v_xu_x+vu_{xx})-(-v_yu_y-vu_{yy})=v(u_{xx}+u_{yy})+(v_xu_x+v_yu_y).$$

引入记号 $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ 和 $\nabla v\cdot\nabla u=v_xu_x+v_yu_y$, 左边即为:

$$\iint_D(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

再计算右边曲线积分, 代入 P,Q:

$$\oint_L -vu_y\,\mathrm{d}x+vu_x\,\mathrm{d}y=\oint_L v\left(u_x\,\mathrm{d}y-u_y\,\mathrm{d}x\right).$$

利用方向导数与法向量的关系. 设 $\vec{n}$ 为曲线 L 的单位外法向量. 由几何关系知, 若 s 为弧长参数, 则外法向量 $\vec{n}=(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s})$. 于是外法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}=\nabla u\cdot\vec{n}=u_x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}-u_y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$. 两边同乘 $\mathrm{d}s$, 得 $\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=u_x\,\mathrm{d}y-u_y\,\mathrm{d}x$. 代入积分式即得:

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

综上所述, 等式成立:

$$\iint_D(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

(2) 由第一 Green 公式:

$$\iint_D(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

在上述公式中交换 u 和 v 的地位, 可得:

$$\iint_D(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

将第一个等式减去第二个等式. 左边为:

$$\iint_D[(v\Delta u+\nabla v\cdot\nabla u)-(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

右边为:

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s-\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}s=\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

从而得证:

$$\iint_D(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

(3) 已知 $u(x,y)$ 是 D 上调和函数.

(3.a) 取 $v(\xi,\eta)=\ln r=\ln\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$. 由于 u 是调和函数, $\Delta u=0$. 对于 $(\xi,\eta)\neq(x,y)$, 我们验证 $\Delta v=0$. 事实上,

$$\frac{\partial v}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{2}\ln((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)\right)=\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}=\frac{1\cdot((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)-(\xi-x)\cdot 2(\xi-x)}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}=\frac{(\eta-y)^2-(\xi-x)^2}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}.$$

同理可得:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=\frac{(\xi-x)^2-(\eta-y)^2}{((\xi-x)^2+(\eta-y)^2)^2}.$$

相加即得:

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2}=0.$$

点 (x,y) 是 v 的奇点. 以 (x,y) 为圆心, ϵ 为半径作小圆 $D_\epsilon\subset D$, 其边界记为 C_ϵ. 在区域 $D\setminus D_\epsilon$ 上应用第二 Green 公式:

$$\iint_{D\setminus D_\epsilon}(v\Delta u-u\Delta v)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta=\oint_{L\cup C_\epsilon^-}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=0.$$

这里 L 取逆时针方向, C_ϵ^- 取顺时针方向 (使得区域在左侧). 移项得:

$$\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\oint_{C_\epsilon}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

其中右侧积分路径 C_ϵ 取逆时针方向, $\vec{n}$ 为 C_ϵ 的外法线 (即背离 (x,y) 的方向). 在 C_ϵ 上, $r=\epsilon$, $v=\ln\epsilon$, $\frac{\partial v}{\partial n}=\frac{\partial\ln r}{\partial r}=\frac{1}{\epsilon}$. 于是右边积分为:

$$\oint_{C_\epsilon}\left(\ln\epsilon\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{1}{\epsilon}\right)\mathrm{d}s=\ln\epsilon\oint_{C_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s-\frac{1}{\epsilon}\oint_{C_\epsilon}u\,\mathrm{d}s.$$

第一项中, 根据 Green 第一公式 (取 $v=1$), 我们有

$$\oint_{C_\epsilon}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s=\iint_{D_\epsilon}\Delta u\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

由于 u 是调和函数, 在 D_ϵ 内 $\Delta u=0$, 故上述积分为 0. 第二项中, 利用积分中值定理, 存在 $M^*\in C_\epsilon$, 使得 $\oint_{C_\epsilon}u\,\mathrm{d}s=u(M^*)\cdot 2\pi\epsilon$. 当 $\epsilon\to 0$ 时, $u(M^*)\to u(x,y)$. 故

$$\lim_{\epsilon\to 0}\mathrm{RHS}=-\frac{1}{\epsilon}\cdot 2\pi\epsilon u(x,y)=-2\pi u(x,y).$$

因此

$$\oint_L\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=-2\pi u(x,y).$$

整理即得:

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_L\left(u\frac{\partial\ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

(3.b) 应用上述公式于圆盘 $D = B_r(x,y)$, 边界 $L = C_r$. 此时在边界上 r 为常数, $\ln r$ 也是常数. 对于以 (x,y) 为圆心的圆周 C_r, 其外法线方向 $\vec{n}$ 即为从圆心指向圆周的径向方向. 此时, 距离 r 沿外法线方向的变化率 $\frac{\partial r}{\partial n} = 1$. 因此, $\ln r$ 的外法线方向导数为:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial n} = \frac{\partial \ln r}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{r} \cdot 1 = \frac{1}{r}.$$

因此

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r}\left(u \cdot \frac{1}{r} - \ln r \cdot \frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u \,\mathrm{d}s - \frac{\ln r}{2\pi}\oint_{C_r}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s.$$

由于 u 是调和函数, 即 $\Delta u = 0$. 根据 Green 第一公式 (取 $v = 1$)

$$\oint_{C_r}\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \iint_{B_r}\Delta u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

其中 B_r 是圆周 C_r 围成的圆盘. 故得平均值公式:

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r} u(\xi,\eta)\,\mathrm{d}s.$$

(4) 我们证明: 若 u 在 D 内不恒为常数, 则其最大值只能在边界 ∂D 上取得.

设 $M = \max_{(x,y)\in\bar{D}} u(x,y)$. 假设 u 在 D 内部某点 $P_0(x_0,y_0)$ 取得最大值, 即 $u(P_0) = M$.

由于 P_0 是内点, 存在 $R > 0$ 使得圆盘 $B_R(P_0) \subset D$. 对于任意 $0 < r < R$, 根据平均值公式 (3.b):

$$u(P_0) = \frac{1}{2\pi r}\oint_{C_r(P_0)} u \,\mathrm{d}s.$$

即

$$M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

改写为

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[M - u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)]\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

由于 M 是最大值, 被积函数 $M - u \geq 0$. 又因为 u 连续, 若被积函数在某处严格大于 0, 则积分必大于 0, 导致矛盾. 因此, 在圆周 $C_r(P_0)$ 上恒有 $u = M$. 由于 r 是 $(0,R)$ 内任意的, 故在整个圆盘 $B_R(P_0)$ 内恒有 $u(P) = M$.

这说明: 如果 u 在内部某点取到最大值, 那么该点附近的一个小邻域内 u 恒等于最大值.

这意味着: 只要 u 在区域内部某一点取到最大值, 那么该点附近的一个圆盘内 u 处处等于最大值. 现在, 设 Q 是 D 内任意一点. 由于 D 是连通区域, 我们可以用一条完全位于 D 内的曲线连接 P_0 和 Q. 我们可以沿着这条曲线覆盖一串有限个互相重叠的小圆盘. 对于第一个圆盘 (以 P_0 为中心), 我们已知其中 $u \equiv M$. 第二个圆盘的中心位于第一个圆盘内, 因此其中心处的函数值为 M. 根据刚才的结论, 第二个圆盘内 u 也恒等于 M. 依此类推, 我们可以将 $u = M$ 的性质

沿着曲线一步步"传递"过去, 直到覆盖点 Q, 从而证明 $u(Q) = M$. 因此, u 在 D 内恒等于 M. 由连续性, u 在 $\bar{D}$ 上恒等于 M.

综上所述, 若 u 不恒为常数, 则最大值 M 不能在 D 内部取得, 只能在边界 ∂D 上取得.

同理可证最小值原理 (考虑 $-u$ 或重复上述过程).