Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

11/12/2025, Week 14

练习 1. 考虑如下的一个积分

$$I_{p,q,r,s} = \int_D x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 p, q, r, s 均为正整数, $D = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$.

若我们记 $D(t) = \{(x,y,z) \mid x,y,z \geq 0, x+y+z \leq t\}$, 以及

$$I_{p,q,r,s}(t) = \int_{D(t)} x^p y^q z^r (t-x-y-z)^s \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

我们完成下面的题目:

(1) 证明:

$$\int_0^1 I_{p,q,r,s}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_{p,q,r,s}}{p+q+r+s+4}.$$

(2) 证明:

$$I_{p,q,r,s+1} = \frac{s+1}{p+q+r+s+4} I_{p,q,r,s}.$$

(3) 计算 $I_{p,q,r,s}$ 的显式表达式

$$I_{p,q,r,s} = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}.$$

(利用 $\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}$)

解答 1. (1) 注意到 $I_{p,q,r,s}(1) = I_{p,q,r,s}$. 我们对 $I_{p,q,r,s}(t)$ 做变量代换 $x = tu, y = tv, z = tw$. 此时雅可比行列式为 t^3. 区域 $D(t)$ 变为 $D(1) = D$. 于是

$$\begin{aligned} I_{p,q,r,s}(t) &= \int_D (tu)^p (tv)^q (tw)^r (t-tu-tv-tw)^s \cdot t^3 \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= t^{p+q+r+s+3} \int_D u^p v^q w^r (1-u-v-w)^s \,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\ &= t^{p+q+r+s+3} I_{p,q,r,s}. \end{aligned}$$

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

因此,

$$\int_0^1 I_{p,q,r,s}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{p+q+r+s+3} I_{p,q,r,s}\,\mathrm{d}t = I_{p,q,r,s}\left[\frac{t^{p+q+r+s+4}}{p+q+r+s+4}\right]_0^1 = \frac{I_{p,q,r,s}}{p+q+r+s+4}.$$

(2) 另一方面, 我们直接计算 $\int_0^1 I_{p,q,r,s}(t)\,\mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 I_{p,q,r,s}(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\int_{D(t)} x^p y^q z^r (t-x-y-z)^s\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{D(1)} x^p y^q z^r \left(\int_{x+y+z}^1 (t-x-y-z)^s\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_D x^p y^q z^r \left[\frac{(t-x-y-z)^{s+1}}{s+1}\right]_{t=x+y+z}^{t=1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_D x^p y^q z^r \frac{(1-x-y-z)^{s+1}}{s+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{s+1} I_{p,q,r,s+1}.
\end{aligned}$$

结合 (1) 中的结论, 我们有

$$\frac{1}{s+1} I_{p,q,r,s+1} = \frac{I_{p,q,r,s}}{p+q+r+s+4} \implies I_{p,q,r,s+1} = \frac{s+1}{p+q+r+s+4} I_{p,q,r,s}.$$

(3) 利用递推公式, 我们有

$$\begin{aligned}
I_{p,q,r,s} &= \frac{s}{p+q+r+s+3} I_{p,q,r,s-1} \\
&= \frac{s(s-1)}{(p+q+r+s+3)(p+q+r+s+2)} I_{p,q,r,s-2} \\
&= \cdots \\
&= \frac{s!}{(p+q+r+s+3)\cdots(p+q+r+4)} I_{p,q,r,0}.
\end{aligned}$$

现在我们需要计算 $I_{p,q,r,0} = \int_D x^p y^q z^r\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. 利用类似的思路 (或者直接利用 Dirichlet 积分公式), 我们可以逐步降维. 或者利用题目提示的积分公式, 我们可以归纳地看. 实际上, 我们可以把 $I_{p,q,r,s}$ 看作关于 s 的递推. 如果我们将 s 视为 0, 我们可以利用类似的降维方法计算 $I_{p,q,r,0}$. 更简单的方法是直接利用广义 Dirichlet 积分公式 (Liouville 形式):

$$\int_{x_i\ge 0, \sum x_i \le 1} x_1^{p_1-1}\cdots x_n^{p_n-1}(1-\sum x_i)^{s-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_n)\Gamma(s)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+s)}.$$

这里对应的是 $p+1, q+1, r+1, s+1$. 所以

$$I_{p,q,r,s} = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+1+q+1+r+1+s+1)} = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}.$$

如果仅利用题目提示 $\int_0^1 x^p(1-x)^{q+1}\,\mathrm{d}x = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+2)!}$ (Beta 函数), 我们可以这样做: 我们已经建立了关于 s 的递推. 实际上关于 p,q,r 也是类似的. 例如, 考虑 $I_{p,q,r,s}$ 对 x 积分: 令 y,z 固定, x 从 0 到 $1-y-z$. 令 $x=(1-y-z)u$, 则 $\mathrm{d}x=(1-y-z)\,\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned}\int_0^{1-y-z} x^p(1-y-z-x)^s\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (1-y-z)^p u^p (1-y-z)^s (1-u)^s (1-y-z)\,\mathrm{d}u\\ &= (1-y-z)^{p+s+1}\int_0^1 u^p(1-u)^s\,\mathrm{d}u\\ &= (1-y-z)^{p+s+1}\frac{p!s!}{(p+s+1)!}.\end{aligned}$$

于是

$$I_{p,q,r,s} = \frac{p!s!}{(p+s+1)!}\int_{D_{y,z}} y^q z^r (1-y-z)^{p+s+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 $D_{y,z}=\{y,z\ge 0, y+z\le 1\}$. 这正好是形式为 $I_{q,r,p+s+1}$ 的二维积分 (这里 z 对应原来的 z, y 对应 y, 指数为 q,r, 剩余项指数为 $p+s+1$). 重复此过程: 令 $y=(1-z)v$,

$$\begin{aligned}\int_0^{1-z} y^q(1-z-y)^{p+s+1}\,\mathrm{d}y &= (1-z)^{q+p+s+1+1}\int_0^1 v^q(1-v)^{p+s+1}\,\mathrm{d}v\\ &= (1-z)^{p+q+s+2}\frac{q!(p+s+1)!}{(p+q+s+2)!}.\end{aligned}$$

最后对 z 积分:

$$\int_0^1 z^r(1-z)^{p+q+s+2}\,\mathrm{d}z = \frac{r!(p+q+s+2)!}{(p+q+r+s+3)!}.$$

将所有系数相乘:

$$I_{p,q,r,s} = \frac{p!s!}{(p+s+1)!}\cdot\frac{q!(p+s+1)!}{(p+q+s+2)!}\cdot\frac{r!(p+q+s+2)!}{(p+q+r+s+3)!} = \frac{p!q!r!s!}{(p+q+r+s+3)!}.$$

练习 2. 假设函数 $u(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上有连续的二阶偏导数, 且 $\Delta u=0$. 而 $u(x,y)$ 的一阶偏导数对任意固定的 $y\in\mathbb{R}$ 是关于 x 的以 2π 为周期的函数. 证明:

$$f(y)=\int_0^{2\pi} u_x^2(x,y)-u_y^2(x,y)\,\mathrm{d}x \equiv Const.,\quad \forall y\in\mathbb{R}.$$

解答 2. 我们计算 $f(y)$ 关于 y 的导数:

$$f'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_0^{2\pi}(u_x^2-u_y^2)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}(u_x^2-u_y^2)\,\mathrm{d}x.$$

在积分号下求导, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x^2-u_y^2) = 2u_xu_{xy}-2u_yu_{yy}.$$

由于 $\Delta u = 0$, 则 $u_{yy} = -u_{xx}$. 代入上式:

$$2u_x u_{xy} - 2u_y(-u_{xx}) = 2u_x u_{xy} + 2u_y u_{xx}.$$

注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}(2u_x u_y) = 2u_{xx}u_y + 2u_x u_{yx}.$$

由于 u 是 C^2 的, $u_{xy} = u_{yx}$. 因此被积函数恰好是一个全微分:

$$\frac{\partial}{\partial y}(u_x^2 - u_y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(2u_x u_y).$$

于是

$$f'(y) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}(2u_x u_y)\,\mathrm{d}x = \left[2u_x(x,y)u_y(x,y)\right]_{x=0}^{x=2\pi}.$$

题目已知 u 的一阶偏导数关于 x 是以 2π 为周期的. 这意味着 $u_x(2\pi, y) = u_x(0, y)$ 且 $u_y(2\pi, y) = u_y(0, y)$. 因此,

$$f'(y) = 2u_x(2\pi,y)u_y(2\pi,y) - 2u_x(0,y)u_y(0,y) = 0.$$

因为 $f'(y) \equiv 0$, 所以 $f(y)$ 是常数.

练习 3. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ $(A > 0)$ 存在, 计算如下积分:

$$I_{a,b} = \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x, \quad a, b > 0.$$

解答 3. 我们考虑截断积分

$$I(\epsilon, M) = \int_\epsilon^M \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

其中 $0 < \epsilon < M < +\infty$. 我们可以将其拆分为两部分:

$$I(\epsilon, M) = \int_\epsilon^M \frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_\epsilon^M \frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

对第一个积分做代换 $u = ax$, $\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}u$, 积分限变为 $a\epsilon$ 到 aM. 对第二个积分做代换 $v = bx$,

$\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\,\mathrm{d}v$, 积分限变为 $b\epsilon$ 到 bM. 于是

$$
\begin{aligned}
I(\epsilon, M) &= \int_{a\epsilon}^{aM} \frac{f(u)}{u/a}\frac{1}{a}\,\mathrm{d}u - \int_{b\epsilon}^{bM} \frac{f(v)}{v/b}\frac{1}{b}\,\mathrm{d}v \\
&= \int_{a\epsilon}^{aM} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{b\epsilon}^{bM} \frac{f(v)}{v}\,\mathrm{d}v \\
&= \left(\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u + \int_{b\epsilon}^{aM} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right) - \left(\int_{b\epsilon}^{aM} \frac{f(v)}{v}\,\mathrm{d}v + \int_{aM}^{bM} \frac{f(v)}{v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{aM}^{bM} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}
$$

现在我们分别考虑 $\epsilon \to 0^+$ 和 $M \to +\infty$.

对于第一部分 $\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$: 由于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 我们可以利用积分中值定理. 存在 $\xi \in (\min(a\epsilon, b\epsilon), \max(a\epsilon, b\epsilon))$ 使得

$$
\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = f(\xi)\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = f(\xi)\ln\left(\frac{b\epsilon}{a\epsilon}\right) = f(\xi)\ln\left(\frac{b}{a}\right).
$$

当 $\epsilon \to 0^+$ 时, $\xi \to 0$, 故 $f(\xi) \to f(0)$. 所以

$$
\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).
$$

对于第二部分 $\int_{aM}^{bM} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u$: 题目给定条件 $\int_A^{+\infty} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z$ 存在. 根据柯西收敛准则, 对于任意 $\eta > 0$, 存在 $K > 0$, 当 $M_1, M_2 > K$ 时, $|\int_{M_1}^{M_2} \frac{f(z)}{z}\,\mathrm{d}z| < \eta$. 令 $M_1 = aM, M_2 = bM$. 当 $M \to +\infty$ 时, $aM, bM \to +\infty$. 因此

$$
\lim_{M \to +\infty} \int_{aM}^{bM} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = 0.
$$

综上所述,

$$
I_{a,b} = \lim_{\substack{\epsilon \to 0^+ \\ M \to +\infty}} I(\epsilon, M) = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right) - 0 = f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right).
$$

练习 4. 函数 $f(x)$ 在实轴上连续且 $f(x) > 0$. 已知对所有的 t, 有:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \le 1.
$$

试证: 对任意的 $a < b$, 有

$$
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \frac{b-a+2}{2}.
$$

解答 4. 我们记 $K(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x$. 已知 $K(t) \le 1$. 我们需要估计 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 考虑对

$K(t)$ 在区间 $[a,b]$ 上积分:

$$\int_a^b K(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t.$$

由于 $f(x) > 0$ 且被积函数非负, 我们可以利用 Fubini 定理交换积分次序:

$$\int_a^b K(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

因为 $K(t) \le 1$, 所以左边 $\int_a^b K(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b 1\,\mathrm{d}t = b-a$.

现在我们计算内层积分 $g(x) = \int_a^b e^{-|t-x|}\,\mathrm{d}t$. 我们需要分情况讨论 x 的位置:

(i) 当 $x < a$ 时: $|t-x| = t-x$ (因为 $t \in [a,b]$).

$$g(x) = \int_a^b e^{-(t-x)}\,\mathrm{d}t = e^x \int_a^b e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^x(e^{-a} - e^{-b}) = e^{-(a-x)} - e^{-(b-x)}.$$

(ii) 当 $a \le x \le b$ 时:

$$g(x) = \int_a^x e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t + \int_x^b e^{-(t-x)}\,\mathrm{d}t = e^{-x}\int_a^x e^t\,\mathrm{d}t + e^x \int_x^b e^{-t}\,\mathrm{d}t$$
$$= e^{-x}(e^x - e^a) + e^x(e^{-x} - e^{-b}) = (1 - e^{-(x-a)}) + (1 - e^{-(b-x)}) = 2 - e^{-(x-a)} - e^{-(b-x)}.$$

(iii) 当 $x > b$ 时: $|t-x| = x-t$.

$$g(x) = \int_a^b e^{-(x-t)}\,\mathrm{d}t = e^{-x}\int_a^b e^t\,\mathrm{d}t = e^{-x}(e^b - e^a) = e^{-(x-b)} - e^{-(x-a)}.$$

注意到对于所有 x, $g(x) > 0$. 我们有不等式:

$$b - a \ge \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

我们要估计的是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 注意到在区间 $[a,b]$ 上, $g(x) = 2 - e^{-(x-a)} - e^{-(b-x)}$. 显然 $g(x) < 2$. 这不能直接给出下界.

让我们重新审视不等式.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le b-a.$$

由于 $f(x) > 0$ 且 $g(x) > 0$, 我们有

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \le b-a.$$

在 $[a,b]$ 上, $g(x) = 2 - (e^{-(x-a)} + e^{-(b-x)})$. 代入得:

$$\int_a^b f(x)(2 - e^{-(x-a)} - e^{-(b-x)})\,\mathrm{d}x \le b-a.$$

即

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)e^{-(x-a)}\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)e^{-(b-x)}\,\mathrm{d}x\le b-a.$$

我们需要估计后两项. 利用题目已知条件 $K(t)\le 1$. 取 $t=a$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|a-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$. 特别是 $\int_a^b e^{-|a-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$. 在 $[a,b]$ 上, $|a-x|=x-a$, 所以 $\int_a^b e^{-(x-a)}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$. 同理, 取 $t=b$, 有 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-|b-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$. 特别是 $\int_a^b e^{-|b-x|}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$. 在 $[a,b]$ 上, $|b-x|=b-x$, 所以 $\int_a^b e^{-(b-x)}f(x)\,\mathrm{d}x\le 1$.

将这两个不等式代入之前的式子:

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-1-1\le 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)e^{-(x-a)}\,\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)e^{-(b-x)}\,\mathrm{d}x\le b-a.$$

所以

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-2\le b-a.$$

整理得

$$2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le b-a+2 \implies \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\le \frac{b-a+2}{2}.$$

练习 5. 证明

$$I(\alpha):=\int_1^{+\infty}e^{-\frac{1}{\alpha^2}\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

在 $\alpha\in(0,1)$ 上一致收敛.

解答 5. 令 $u=\frac{1}{\alpha}$. 由于 $\alpha\in(0,1)$, 故 $u\in(1,+\infty)$. 积分变为 $J(u)=\int_1^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}\,\mathrm{d}x$. 我们需要证明 $\lim_{A\to+\infty}\sup_{u\in(1,\infty)}\int_A^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}\,\mathrm{d}x=0$.

对积分 $\int_A^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}\,\mathrm{d}x$ 做变量代换 $y=u(x-u)$, 则 $x=\frac{y}{u}+u$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\,\mathrm{d}y$. 当 $x=A$ 时, $y=u(A-u)$. 于是

$$\int_A^{+\infty}e^{-u^2(x-u)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{u}\int_{u(A-u)}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

我们分两种情况讨论 u 的取值:

(i) 当 $1<u\le\frac{A}{2}$ 时: 此时 $A-u\ge\frac{A}{2}$, 故积分下限 $u(A-u)\ge 1\cdot\frac{A}{2}=\frac{A}{2}$. 由于 $u>1$, $\frac{1}{u}<1$. 且被积函数 $e^{-y^2}>0$.

$$\frac{1}{u}\int_{u(A-u)}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\le\int_{A/2}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

(ii) 当 $u>\frac{A}{2}$ 时: 此时 $\frac{1}{u}<\frac{2}{A}$. 我们将积分范围扩大到 $(-\infty,+\infty)$:

$$\frac{1}{u}\int_{u(A-u)}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y<\frac{2}{A}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{2\sqrt{\pi}}{A}.$$

综上所述, 对于任意 $u \in (1, +\infty)$, 我们有

$$\int_A^{+\infty} e^{-u^2(x-u)^2}\,\mathrm{d}x \le \max\left(\int_{A/2}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y, \frac{2\sqrt{\pi}}{A}\right).$$

当 $A \to +\infty$ 时, $\int_{A/2}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \to 0$ (因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 收敛), 且 $\frac{2\sqrt{\pi}}{A} \to 0$. 因此, 该积分关于 $u \in (1, +\infty)$ (即 $\alpha \in (0, 1)$) 一致收敛.