Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

18/12/2025, Week 15

练习 1. 考虑 Γ 函数

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t, \quad z > 0.$$

(注记: 如果变量 z 是复的, 则上式一般定义在 $\mathrm{Re}(z) > 0$) 我们现在关注 $\Gamma(z)$ 的小 z 渐近展开.

解答 1. 首先利用分部积分, 我们可以知道

$$\begin{aligned}\Gamma(z) &= \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} t^z \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{z} \left[e^{-t} t^z \Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t} t^z \, \mathrm{d}t \right] \\ &= \frac{1}{z} \int_0^\infty e^{-t} t^z \, \mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{1}$$

这表明了递推关系 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. 对每个固定的 t, 我们注意到: 当 $z \to 0$ 时, $t^z \approx 1$. 事实上, 我们可以把 t^z 写成指数形式 $e^{z \log t}$. 当 $z \to 0$ 时, 利用 Taylor 展开, 我们有

$$t^z = e^{z \log t} = 1 + z \log t + \frac{z^2}{2} \log^2 t + \cdots$$

对任意的 $z > 0$ 和 $t > 0$, 这显然是一个收敛级数. 在上式两端同时乘上 e^{-t}, 我们得到:

$$t^z e^{-t} = e^{-t} + z e^{-t} \log t + \frac{z^2}{2} e^{-t} \log^2 t + \cdots$$

我们希望把这一行代入 (1) 式中, 并对每一项分别积分. 为了确保逐项积分后还是收敛的, 我们需要利用到 Lebesgue 控制收敛定理.

[当 $n \to \infty$ 时, 如果 $f_n(t) \to f(t)$ 对 $t \in (a, b)$ 几乎处处成立 (关于 (a, b) 上的 Lebesgue 测度), 并且存在一个可积函数 g 使得对所有的 n, 都有 $|f_n| \le g$ 几乎处处成立, 并且 $\int_a^b g(t) \, \mathrm{d}t < \infty$. 那么 $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t$.]

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

事实上, 这里所有的部分和都能被一个关于 t 的可积函数控制住,

$$\begin{aligned}|e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{z^k}{k!}\log^k t| &\le e^{-t}\sum_{k=0}^{n}\frac{|z|^k}{k!}|\log t|^k \le e^{-t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|z|^k}{k!}|\log t|^k \\ &= e^{|z||\log t|-t} \\ &= \begin{cases} t^{-|z|}e^{-t}, & 0<t<1, \\ t^{|z|}e^{-t}, & t\ge 1,\end{cases}\end{aligned}$$

这些上界在 $(0,\infty)$ 上都是绝对可积的. 因此, 我们可以逐项积分得到

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^\infty e^{-t}\left(1+z\log t+\frac{z^2}{2}\log^2 t+\cdots\right)\mathrm{d}t \\ &= 1+z\int_0^\infty e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t+\frac{z^2}{2}\int_0^\infty e^{-t}\log^2 t\,\mathrm{d}t+\cdots \\ &= 1-\gamma z+\left(\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\pi^2}{12}\right)z^2+\cdots,\end{aligned}$$

我们稍后再给出第三项的系数. 这里 γ 是 Euler 常数, 定义为

$$\gamma = -\int_0^\infty e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t \approx 0.577216. \tag{2}$$

因此 $\Gamma(z)$ 在 $z=0$ 处的渐近展开为

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}-\gamma+\left(\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\pi^2}{12}\right)z+\cdots.$$

练习 2. 我们回顾 (2) 式中定义的 Euler 常数 γ. 证明 (2) 等价于

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n\right).$$

解答 2. 先说明右端的极限确实是存在的. 构造序列

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\log n.$$

则

$$x_n - x_{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}.$$

利用到下面这个事实, 对任意的 $t > 0$, 都有

$$\frac{t}{1+t} < \log(1+t) < t.$$

取 $t = \frac{1}{n}$, 我们得到

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

这说明 $\{x_n\}$ 是一个单调递减的序列. 对于函数 $f(x) = 1/x$, 在区间 $[k, k+1]$, $k \geq 1$, 上是单调递减的, 因此

$$\frac{1}{k} > \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(k+1) - \log k.$$

则

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \log(n+1).$$

因此

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n > \log(n+1) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0.$$

综上, $\{x_n\}$ 是一个有下界的单调递减序列, 故极限存在.

我们从积分定义出发. 利用关系式 $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n$ (对 $0 \leq t \leq n$), 我们可以将 γ 写为

$$\begin{aligned}\gamma &= -\int_0^{\infty} e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t \\ &= -\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

这里我们使用了 Lebesgue 控制收敛定理. 注意到函数序列 $f_n(t) = (1-t/n)^n \cdot \mathbf{1}_{[0,n]}(t)$ 逐点收敛到 e^{-t}. 此外, 利用不等式 $1-x \leq e^{-x}$, 我们有 $|f_n(t)| \leq e^{-t}$. 由于控制函数 $e^{-t}|\log t|$ 在 $(0,\infty)$ 上绝对可积, 故极限符号可以移入积分号内.

接下来, 令 $t = nx$, 则 $\mathrm{d}t = n\,\mathrm{d}x$, 积分变为

$$\begin{aligned}\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log t\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 (1-x)^n(\log n + \log x)n\,\mathrm{d}x \\ &= n\log n\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 (1-x)^n\log x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

第一部分积分很容易计算:

$$\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

对于第二部分, 我们利用分部积分: 令 $u = \log x$, $\mathrm{d}v = (1-x)^n\,\mathrm{d}x$. 我们选取 $v = \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}$ (使得

$v(0)=0$). 于是

$$\int_0^1 (1-x)^n \log x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}\log x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{n+1}\frac{1}{x}\, \mathrm{d}x$$
$$= 0 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x}\, \mathrm{d}x.$$

(注: 边界项在 $x=1$ 处显然为 0; 在 $x\to 0$ 时, 分子趋于 0 的速度为 $O(x)$, 乘以 $\log x$ 后极限仍为 0). 接着令 $y=1-x$, 我们有

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^{n+1}}{x}\, \mathrm{d}x = \int_1^0 \frac{1-y^{n+1}}{1-y}(-\,\mathrm{d}y) = \int_0^1 \frac{1-y^{n+1}}{1-y}\, \mathrm{d}y.$$

利用几何级数求和公式 $\frac{1-y^{n+1}}{1-y} = \sum_{k=0}^n y^k$, 我们得到

$$\int_0^1 \frac{1-y^{n+1}}{1-y}\, \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^n \int_0^1 y^k \, \mathrm{d}y = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

将这些结果代回原式:

$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \log t \, \mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\log n + n\left(-\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)$$
$$= \frac{n}{n+1}\left(\log n - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right).$$

最后取 $n\to\infty$, 注意到 $\frac{n}{n+1}\to 1$ 且 $\frac{1}{n+1}\to 0$, 我们有

$$\gamma = -\lim_{n\to\infty}\left(\log n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \log n\right).$$

练习 3. 得到 Γ 函数的 Weierstrass 乘积展开

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z e^{\gamma z}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

解答 3. 定义

$$\Gamma_n(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

考虑如下的递推关系, 令

$$I_{n,k}(z) = \int_0^n t^{z-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k \mathrm{d}t.$$

利用分部积分, 我们有

$$I_{n,k}(z)=\left[\frac{t^z}{z}\left(1-\frac{t}{n}\right)^k\right]_0^n+\frac{k}{nz}\int_0^n t^z\left(1-\frac{t}{n}\right)^{k-1}\mathrm{d}t=\frac{k}{nz}I_{n,k-1}(z+1).$$

重复利用这个递推公式, 从 $k=n$ 开始, 我们得到

$$\Gamma_n(z)=I_{n,n}(z)=\frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}.$$

取倒数, 并将 n^z 和 $n!$ 用指数表示, 注意到:

$$n^{-z}=e^{-z\log n},\quad \log n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\gamma_n,$$

其中 $\gamma_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\log n$ 是部分和定义的 Euler 常数近似, 于是

$$\frac{1}{\Gamma_n(z)}=ze^{\gamma_n z}\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-z/k}.$$

为说明无穷乘积

$$\prod_{k=1}^\infty\Big(1+\frac{z}{k}\Big)e^{-z/k}$$

的收敛性, 取对数,

$$S(z):=\sum_{k=1}^\infty\Big(\log\Big(1+\frac{z}{k}\Big)-\frac{z}{k}\Big).$$

只需证明上式级数对任一固定 z 收敛. 由 Taylor 展开或基本不等式, 对于任意实数 w 满足 $|w|\le 1/2$ 存在常数 C 使得

$$|\log(1+w)-w|\le Cw^2.$$

取 $w=z/k$, 当 $k>2|z|$ 时有 $|w|\le 1/2$, 于是尾项有

$$\sum_{k>2|z|}\left|\log\Big(1+\frac{z}{k}\Big)-\frac{z}{k}\right|\le Cz^2\sum_{k>2|z|}\frac{1}{k^2}<\infty.$$

前面有限多项显然有限, 因此整个级数绝对收敛, 从而对数级数收敛, 乘积收敛 (在任意有界区间上一致收敛).

取 $n\to\infty$, 并利用 $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\gamma$, 我们得到

$$\frac{1}{\Gamma(z)}=ze^{\gamma z}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}.$$

练习 4. 已知道函数 $\psi(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\log\Gamma(z)$, 其中 $\Gamma(z)$ 是 Gamma 函数. 证明:

$$\psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

解答 4. 直接利用 $\log\Gamma(z)$ 的 Weierstrass 乘积展开:

$$\log\Gamma(z) = -\gamma z - \log z + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{n} - \log\left(1+\frac{z}{n}\right)\right).$$

对 z 求导得

$$\psi(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+z}\right).$$

再对 z 求导一次:

$$\psi'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}.$$

练习 5. 证明:

$$\int_0^{\infty} e^{-t}\log^2 t\,\mathrm{d}t = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}.$$

这给出 $\Gamma(z)$ 中小 z 展开的第三项系数.

解答 5. 令

$$I = \int_0^{\infty} e^{-t}\log^2 t\,\mathrm{d}t.$$

我们可以利用 $\Gamma'(z)$ 的性质. 由

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t,$$

对 z 求导得

$$\Gamma'(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\log t\,\mathrm{d}t.$$

再对 z 求导一次,

$$\Gamma''(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}(\log t)^2\,\mathrm{d}t.$$

取 $z=1$, 有

$$\Gamma''(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}(\log t)^2\,\mathrm{d}t = I.$$

另一方面, 记 $\psi(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, 则 $\psi'(z) = \frac{\Gamma''(z)\Gamma(z) - (\Gamma'(z))^2}{\Gamma^2(z)}$. 当 $z=1$ 时, $\Gamma(1)=1$. $\Gamma'(1) = -\gamma$, $\Gamma''(1) = I$, 所以

$$\psi'(1) = I - \gamma^2.$$

而 $\psi'(1) = \frac{\pi^2}{6}$. 因此 $I = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6}$.