Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

09/10/2025, Week 5

练习 1 (隐函数定理的应用)**.**

(1) 对任意的 $c \in \mathbb{R}^n$，我们可以定义一个次数为 n 的实系数多项式 P_c，即我们有映射

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}[X], \quad c \mapsto X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n.$$

给定 $b \in \mathbb{R}^n$，我们假设 P_b 有一个实数根 $x_b \in \mathbb{R}$ 并且这个根的重数是 1。证明: 存在 b 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 U 和 x_b 在 $\mathbb{R}$ 中的开邻域 V, 使得对任意的 $c \in U$, P_c 在 V 中恰有一个根 $z(c)$ 并且重数是 1, 并且 $z(c)$ 是光滑的.

(2) 考虑实系数多项式 $P(X) = X^n + c_1 X^{n-1} + \cdots + c_n$. 如果对 $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$, $P(X)$ 恰好有 n 个两两不同的实根

$$z_1(c_1^*, \ldots, c_n^*) < z_2(c_1^*, \ldots, c_n^*) < \cdots < z_n(c_1^*, \ldots, c_n^*).$$

证明: 存在 $(c_1^*, \ldots, c_n^*) \in \mathbb{R}^n$ 的开邻域 Ω 和 Ω 上的光滑函数 $z_1, \ldots, z_n$, 使得对任意的 $(c_1, \ldots, c_n) \in \Omega$, 我们有

$$z_1(c_1, \ldots, c_n) < z_2(c_1, \ldots, c_n) < \cdots < z_n(c_1, \ldots, c_n)$$

并且

$$P(z_i(c_1, \ldots, c_n)) = 0 \quad \text{对于} i = 1, \ldots, n.$$

(3) 考虑 $n \times n$ 的实矩阵 $A = (A_{ij})_{i,j \le n}$, 假设 A 有 n 个不同的实特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. 证明, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意的 $n \times n$ 的实矩阵 $B = (B_{ij})_{i,j \le n}$, 如果对每对指标 (i, j), $|A_{ij} - B_{ij}| < \varepsilon$, 那么 B 有 n 个不同的实特征值 $\lambda_1(B) < \lambda_2(B) < \cdots < \lambda_n(B)$. 进一步证明, 如果将每个 λ_i 看做是 B 的系数 B_{ij} 的函数, 这些函数在区域 $|B_{ij} - A_{ij}| < \varepsilon$ (其中 $i, j \le n$) 上是光滑的.

解答 2. (1) 定义 $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$F(c, x) = x^n + c_1 x^{n-1} + \cdots + c_{n-1} x + c_n,$$

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

其中 $c=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{R}^n$. 由题意可知 $P(x_b)=0$ 且 $P'(x_b)\neq 0$, 因此:

$$F(b,x_b)=0 \quad 且 \quad \frac{\partial F}{\partial x}(b,x_b)\neq 0.$$

由于 F 是光滑的 (多项式函数是光滑函数), 且满足 $F(b,x_b)=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(b,x_b)\neq 0$. 根据隐函数定理, 存在 b 的开邻域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 和 x_b 的开邻域 $V\subset\mathbb{R}$ 以及光滑函数 $z:U\to V$ 使得对于所有 $c\in U$, 有:

$$F(c,z(c))=0 \quad 且 \quad z(b)=x_b.$$

又因为 $\frac{\partial F}{\partial x}(c,z(c))\neq 0$, 该根是单根 (重数为 1). □

(2) 考虑函数 $F:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 定义为:

$$F(c,x)=x^n+c_1x^{n-1}+\cdots+c_{n-1}x+c_n,$$

其中 $c=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{R}^n$. 这是一个多项式函数, 因此是光滑的 (实际上是实解析的).

给定 $(c_1^*,\ldots,c_n^*)\in\mathbb{R}^n$, 且 $P(X)$ 有 n 个两两不同的实根:

$$z_1^*<z_2^*<\cdots<z_n^*,$$

其中 $z_i^*=z_i(c_1^*,\ldots,c_n^*)$. 由于这些根都是单根, 我们有:

$$F(c^*,z_i^*)=0 \quad 且 \quad \frac{\partial F}{\partial x}(c^*,z_i^*)\neq 0 \quad 对于i=1,\ldots,n.$$

对于每个 $i=1,\ldots,n$, 由于 $F(c^*,z_i^*)=0$, $\frac{\partial F}{\partial x}(c^*,z_i^*)\neq 0$, 根据隐函数定理, 存在 $(c_1^*,\ldots,c_n^*)$ 的开邻域 $U_i\subset\mathbb{R}^n$, z_i^* 的开邻域 $V_i\subset\mathbb{R}$, 以及光滑函数 $z_i:U_i\to V_i$, 使得对于所有 $c\in U_i$, 有:

$$F(c,z_i(c))=0 \quad 且 \quad z_i(c^*)=z_i^*.$$

由于 $z_1^*<z_2^*<\cdots<z_n^*$, 我们可以选择不相交的邻域 V_i, 即:

$$V_i\cap V_j=\emptyset \quad 对于i\neq j,$$

并且保持顺序:

$$\sup V_i<\inf V_{i+1} \quad i=1,\ldots,n-1.$$

取

$$\Omega=U_1\cap U_2\cap\cdots\cap U_n.$$

则 Ω 是 $(c_1^*,\ldots,c_n^*)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中的开邻域 (注意 $c^*\in\Omega$, 所以 Ω 非空).

对于任意 $c=(c_1,\ldots,c_n)\in\Omega$, 每个 $z_i(c)$ 被定义, 且由于 V_i 不相交并保持顺序, 我们有:

$$z_1(c)<z_2(c)<\cdots<z_n(c).$$

每个 $z_i : U_i \to V_i$ 是光滑的, 因此限制在 Ω 上也是光滑的. 于是, 映射:

$$c \mapsto z_i(c), \quad i = 1, \ldots, n$$

是从 Ω 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数. 此外, 对于每个 $c \in \Omega$, 有:

$$P(z_i(c)) = F(c, z_i(c)) = 0 \quad \text{对于 } i = 1, \ldots, n.$$

□

(3) 考虑函数 $F : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 定义为:

$$F(B, \lambda) = \det(B - \lambda I),$$

其中 $B = (B_{ij})$ 是 $n \times n$ 实矩阵, $\lambda \in \mathbb{R}$. 这是一个多项式函数, 因此是光滑的.

给定矩阵 A 有 n 个不同的实特征值 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$. 对于每个 $i = 1, \ldots, n$, 有:

$$F(A, \lambda_i) = 0.$$

由于特征值 λ_i 都是单根, 特征多项式的导数在 λ_i 处不为零:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(A, \lambda_i) \neq 0.$$

根据隐函数定理, 存在: A 的开邻域 $U_i \subset \mathbb{R}^{n\times n}$, λ_i 的开邻域 $V_i \subset \mathbb{R}$, 以及光滑函数 $\Lambda_i : U_i \to V_i$, 使得对于所有 $B \in U_i$, 有:

$$F(B, \Lambda_i(B)) = 0 \quad \text{且} \quad \Lambda_i(A) = \lambda_i.$$

即, $\Lambda_i(B)$ 是矩阵 B 的特征值.

由于 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$, 我们可以选择不相交的邻域 V_i, 即:

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad \text{对于} i \neq j,$$

并且保持顺序:

$$\sup V_i < \inf V_{i+1}, i = 1, \ldots, n-1.$$

令:

$$U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n. \ (A \in U)$$

由于每个 U_i 都是 A 的开邻域, 且有限个开邻域的交集仍是开邻域, 所以 U 是 A 在 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 中的非空开邻域.

由于 U 是开集, 存在 $\varepsilon > 0$ 使得集合:

$$\{B \in \mathbb{R}^{n\times n} : |A_{ij} - B_{ij}| < \varepsilon \text{ 对于所有} i, j\} \subset U.$$

对于任意满足 $|A_{ij} - B_{ij}| < \varepsilon$ 的矩阵 B, 有 $B \in U$, 因此每个 $\Lambda_i(B)$ 被定义, 且由于 V_i 不相交并保持顺序, 有:

$$\Lambda_1(B) < \Lambda_2(B) < \cdots < \Lambda_n(B).$$

即, B 有 n 个不同的实特征值.

每个 $\Lambda_i : U_i \to V_i$ 是光滑的, 因此限制在 U 上也是光滑的. 于是, 映射:

$$B \mapsto \Lambda_i(B) \quad 对于 i = 1, \ldots, n$$

是从 U 到 $\mathbb{R}$ 的光滑函数. 特别地, 当将每个 Λ_i 视为 B 的系数 B_{ij} 的函数时, 这些函数在区域 $|B_{ij} - A_{ij}| < \varepsilon$ 中是光滑的. $\square$

注记 3. 在大家学过复变函数 (或复分析), 掌握 "解析性" 的相关概念后, 可以回来看看这道练习题目的结论是否可以推广到复系数的多项式和复系数的矩阵上去.

练习 4 (偏导数的一个简单几何应用: 特征线法求解 (拟) 线性偏微分方程)**.**
一阶 PDE: $F(u, u_x, u_y, x, y) = 0$, $u = u(x, y)$.

- 线性 (linear) 方程

  $$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = c(x,y)u,$$

  其中 a, b, c 是光滑函数. 例如: $u_x + u_y = 2$.

- 拟线性 (quasi-linear) 方程, 如果它关于未知函数的最高阶偏导数是线性的, 但系数可以依赖于未知函数本身.

  $$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u).$$

  例如著名的 Hopf 方程: $u_t + 6uu_x = 0$, 这里 $u = u(x,t)$.

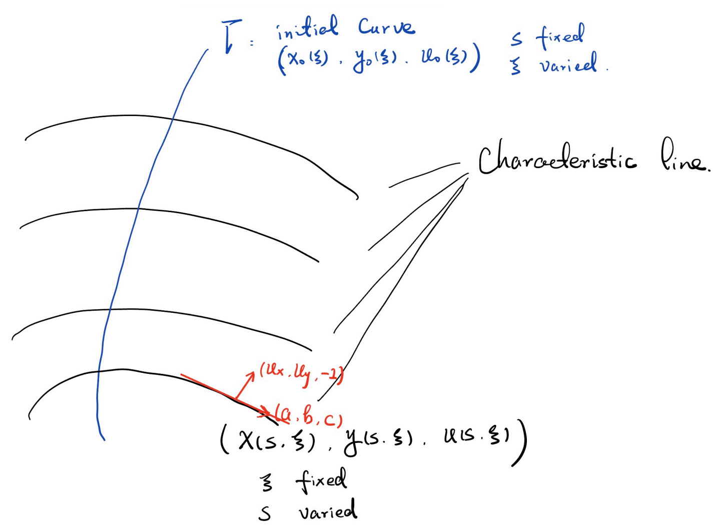
特征线法求解拟线性方程的一般思想:

$$\frac{dx}{ds} = a, \quad \frac{dy}{ds} = b, \quad \frac{du}{ds} = c.$$

初始条件: $x(s=0,\xi) = x_0(\xi)$, $y(s=0,\xi) = y_0(\xi)$, $u(s=0,\xi) = u_0(\xi)$.

(1) 考虑 $u_x + u_y = 2$, 并给出初始条件 $u_0(x) := u(x, y=0) = x^2$. 使用特征线法求解该初值问题.

(2) 考虑 Hopf 方程 $u_t + 6uu_x = 0$, 并给出初始条件 $u_0(x) := u(x, t=0)$. 使用特征线法求解该初值问题. 请问 Hopf 方程的解是否光滑? 并说明其原因 (提示: 你可以考虑 $u_x(x,t)$).



特征线法示意图

解答 5. (1) 特征线法: 令参数 s, 沿特征线满足

$$\frac{dx}{ds}=1,\qquad \frac{dy}{ds}=1,\qquad \frac{du}{ds}=2.$$

初值在曲线 $y=0$ 给出, 记初始参数为 ξ, 初值为

$$x_0=\xi,\quad y_0=0,\quad u_0=\xi^2.$$

解得

$$x=\xi+s,\qquad y=s,\qquad u=\xi^2+2s.$$

消去参数 $s=y$ 和 $\xi=x-y$, 得到显式解

$$u(x,y)=(x-y)^2+2y.$$

验证: $u(x,0)=x^2$ 且 $u_x+u_y=2$.

(2) Hopf 方程 $u_t+6uu_x=0$. 沿特征线有

$$\frac{dt}{ds}=1,\qquad \frac{dx}{ds}=6u,\qquad \frac{du}{ds}=0,$$

解得

$$t=s+C_1(\xi),\qquad x=6us+C_2(\xi),\qquad u=C_3(\xi).$$

若初始曲线为 $\Gamma=(0,\xi,u_0(\xi))$, 则 $C_1(\xi)=0$, $C_2(\xi)=\xi$, $C_3(\xi)=u_0(\xi)$.

$$x=\xi+6t\,u_0(\xi).$$

因此隐式解为: $u(x,t) = u_0(\xi)$, 其中 ξ 由方程 $x = \xi + 6t\, u_0(\xi)$ 确定.

考察解的光滑性, 对 ξ 关于 x 求导得

$$1 = \xi_x + 6t\, u_0'(\xi)\, \xi_x \quad \Longrightarrow \quad \xi_x = \frac{1}{1 + 6t\, u_0'(\xi)}.$$

于是

$$u_x = u_0'(\xi)\, \xi_x = \frac{u_0'(\xi)}{1 + 6t\, u_0'(\xi)}.$$

当存在 ξ 使得 $1 + 6t\, u_0'(\xi) = 0$ 时, u_x 在有限时间变为无穷大, 即出现梯度爆破 (特征线相交), 解不再光滑. 若初始导数满足 $u_0'(\xi) \geq 0$ 对所有 ξ 成立, 则分母恒正, 解保持全局光滑; 若 $\min_\xi u_0'(\xi) < 0$, 则在最早破裂时间

$$t_* = \frac{1}{\max[-6\, u_0'(\xi)]} > 0$$

处发生爆破 (blow-up).

举例: 取 $u_0(x) = -x$ (此时 $u_0' = -1$), 隐式关系为 $x = \xi - 6t\xi = \xi(1 - 6t)$, 于是 $\xi = \dfrac{x}{1 - 6t}$,

$$u(x,t) = -\frac{x}{1 - 6t}, \qquad u_x = -\frac{1}{1 - 6t},$$

在 $t \to 1/6$ 时 u_x 发散, 说明在 $t_* = 1/6$ 出现破裂.