Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

30/10/2025, Week 8

练习 1 (重积分的定义)**.**

(1) 利用定义计算二重积分

$$\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}.$$

(2) 计算下列极限

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} \frac{i}{n}\, e^{-j/n}.$$

(提示: 将此极限转化为重积分并计算其值, 对应区域为 $\{(x,y) : 0 \le y \le x \le 1\}$)

解答 2. (1) 用直线 $x = i/n$, $y = j/n$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ 划分区域 D, 并选取被积函数在这些正方形右定点的值作为取样点, 则有

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \to \frac{1}{4}, \quad n \to \infty.$$

(2) 令 $x_i = i/n$, $y_j = j/n$. 注意到当 i 从 1 到 n, j 从 1 到 i 时, (x_i, y_j) 遍历了区域 $D = \{(x,y) : 0 \le y \le x \le 1\}$ 上的一个等分网格, 每个小矩形的面积为 $(1/n)(1/n) = 1/n^2$. 因此

$$L = \iint_D xe^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^x xe^{-y}\,dy\,dx = \int_0^1 x(1 - e^{-x})\,dx.$$

计算得

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^1 xe^{-x}\,dx = [-(x+1)e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{2}{e},$$

因此

$$L = \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{2}{e}\right) = \frac{2}{e} - \frac{1}{2}.$$

下面的题目涉及到重积分计算的综合练习, 请同学们完成.

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

练习 3. $I = \iint_D xy \,\mathrm{d}\sigma$,

(1) D 是由 $x=1$, $x=2$, $y=x$ 围成的区域.

(2) D 是由 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

解答 4. (1) 将区域表示为

$$D = \{(x,y) : 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x\},$$

于是

$$I = \iint_D xy \,\mathrm{d}\sigma = \int_1^2 \int_0^x xy \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^2 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^x \mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x^3}{2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_1^2 = \frac{15}{8}.$$

(2) 由

$$y^2 = y+2 \iff y^2 - y - 2 = (y-2)(y+1) = 0,$$

得交点为 $(1,-1)$ 和 $(4,2)$. 对于 $-1 \le y \le 2$ 有 $y^2 \le x \le y+2$，故

$$I = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_{-1}^2 y \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=y^2}^{x=y+2} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y\big((y+2)^2 - y^4\big) \,\mathrm{d}y.$$

展开并计算得

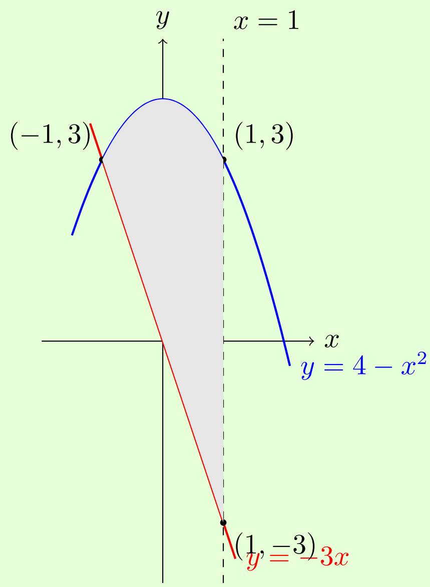
$$I = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 \left(y^3 + 4y^2 + 4y - y^5\right) \mathrm{d}y = \frac{1}{2} \left[\frac{y^4}{4} + \frac{4y^3}{3} + 2y^2 - \frac{y^6}{6}\right]_{-1}^2 = \frac{45}{8}.$$

练习 5. 计算

$$I = \iint_D x \log(y + \sqrt{1+y^2}) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由 $y = 4 - x^2$, $y = -3x$, $x = 1$ 围成的闭区域.

解答 6. 答案是 0, 画出图来看个区域上被积函数的奇偶性即可.



练习 7. 已知 $f \in C([0,1])$, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = A < \infty$, 求 $I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y$.

解答 8. 交换 x 和 y 的积分次序, 再利用对称性 (交换积分变量 x 和 y), 我们有

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x)f(y)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y.$$

则

$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_0^1 f(y)\,\mathrm{d}y = A^2. \end{aligned}$$

因此 $I = \frac{A^2}{2}$.

(异法) 假设 f 的原函数是 F. 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \int_x^1 f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 f(x)[F(1) - F(x)]\,\mathrm{d}x \\ &= F(1)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}F(x) \\ &= AF(1) - \frac{1}{2}F^2(1) + \frac{1}{2}F^2(0). \end{aligned}$$

又 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = F(1) - F(0) = A$, 故 $F(1) = A + F(0)$. 代入上式得

$$I = AF(1) - \frac{1}{2}\big(F(1) - F(0)\big)\big(F(1) + F(0)\big) = \frac{A}{2}\big(F(1) - F(0)\big) = \frac{A^2}{2}.$$

练习 9. 计算 $I = \iint_D |y - x^2|$, 其中 $D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$.

解答 10. 按抛物线 $y = x^2$ 将区域分为上下两部分,

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x^2 - y)\, dy + \int_{x^2}^1 (y - x^2)\, dy \right) dx.$$

计算内层积分得

$$\int_0^{x^2} (x^2 - y)\, dy = \frac{x^4}{2}, \qquad \int_{x^2}^1 (y - x^2)\, dy = \frac{1}{2} - x^2 + \frac{x^4}{2},$$

因此

$$I = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - x^2 + x^4 \right) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}.$$

练习 11. 设 $f \in C[a, b]$, 证明

$$\left(\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right)^2 \le (b - a) \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

解答 12. 由 Cauchy-Schwarz 不等式, 对于 $f, g \in C[a, b]$, 有

$$\left(\int_a^b f(x) g(x)\, \mathrm{d}x \right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

取 $g(x) = 1$, 则

$$\left(\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right)^2 \le (b - a) \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

但是我们用重积分的方法来看一看. 考虑区域 $D = \{(x, y) : a \le x \le b, a \le y \le b\}$ 上的函数

$$\begin{aligned}
\left(\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right)^2 &= \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b f(x) f(y)\, \mathrm{d}y = \iint_D f(x) f(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&\leqslant \iint_D \frac{f^2(x) + f^2(y)}{2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2} \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b f^2(y)\, \mathrm{d}y + \frac{1}{2} \int_a^b \mathrm{d}y \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x \\
&= (b - a) \int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

练习 13. 设区域 D 在 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ 三点围成的三角形区域的面积为 A. 有如下的

线性变换 T:

$$x = x_3 + u(x_1 - x_3) + v(x_2 - x_3),$$
$$y = y_3 + u(y_1 - y_3) + v(y_2 - y_3).$$

证明: $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2A\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$, 其中 $D' = \{(u,v) : u \geq 0, v \geq 0, u+v \leq 1\}$. 可以拆解为如下的问题:

(1) 证明 T 将 D' 1-1 映射为 D.

(2) 计算雅可比行列式 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 2A$.

(3) 利用变量代换公式完成证明.

再追加一个简单问题: 计算 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解答 14. (1) 通过变换矩阵的可逆性.

(2) 计算雅可比行列式:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

由行列式与有向面积的关系，上式的绝对值等于三角形 $P_1P_2P_3$ 的双倍面积，即

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = |\vec{P_3P_1} \times \vec{P_3P_2}| = 2A.$$

(符号取决于定向，但面积取绝对值)

由三角形的重心坐标公式: $\bar{x} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$, 利用

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y},$$

我们有 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{A}{3}(x_1 + x_2 + x_3)$.

练习 15 (Poisson 公式)**.** 证明如下的 Poisson 公式:

$$I = \iint_D f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-v^2}f\left(v\sqrt{a^2+b^2}+c\right)\mathrm{d}v.$$

其中 $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $a^2 + b^2 \neq 0$, f 连续.

解答 16. 事实上, 我们寻求一个变换使得 $ax+by=v\sqrt{a^2+b^2}$. 我们可以考虑如下的变换:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{r} & \frac{a}{r} \\ -\frac{a}{r} & \frac{b}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这个变换矩阵是一个正交阵. 正交变换保长度, 把 D 1-1 映为 $D'=\{(u,v): u^2+v^2\le 1\}$, 且雅可比行列式的绝对值为 1. 因此

$$I=\iint_D f(ax+by+c)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{u^2+v^2\le 1} f(ru+c)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

固定 $v\in[-1,1]$, 则 u 的取值范围为 $-\sqrt{1-v^2}\le u\le\sqrt{1-v^2}$. 因此

$$I=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} f(rv+c)\,\mathrm{d}u=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-v^2}f(rv+c)\,\mathrm{d}v.$$