Exercise Sheet – Mathematical Analysis III

Taiyang Xu*

06/11/2025, Week 9

练习 1. 计算重积分

(1) $\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由平面曲线 $xy=1$, $xy=3$, $y^2=x$, $y^2=3x$ 所围成的有界区域.

(2) $\iint_D \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x+y+3}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$.

(3) $\iint_D \frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-x-y}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x, \frac{3}{4}\leqslant x+y\leqslant 1\}$.

解答 1. (1) 令

$$u=xy, \qquad v=\frac{y^2}{x},$$

则

$$y=(uv)^{1/3}, \qquad x=u^{2/3}v^{-1/3}.$$

计算雅可比行列式得

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\frac{1}{3v}.$$

被积函数化为

$$\frac{3x}{y^2+xy^3}=\frac{3x}{y^2(1+xy)}=\frac{3}{v(1+u)}.$$

因此原积分变换为

$$\iint_D \frac{3x}{y^2+xy^3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{u=1}^{3}\int_{v=1}^{3}\frac{3}{v(1+u)}\cdot\frac{1}{3v}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\int_1^3\int_1^3\frac{1}{v^2(1+u)}\,\mathrm{d}v\mathrm{d}u.$$

变量可分离, 得

$$\left(\int_1^3\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_1^3\frac{1}{v^2}\,\mathrm{d}v\right)=(\ln 4-\ln 2)\left(1-\tfrac{1}{3}\right)=\ln 2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\ln 2.$$

故积分值为 $\dfrac{2}{3}\ln 2$.

*School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China. Email: tyxu19@fudan.edu.cn

(2) 由轮转对称性, 容易知道该积分值为 0.

(3) 令

$$u = x + y, \qquad v = \frac{y}{x} \quad (0 \le v \le 1),$$

则

$$x = \frac{u}{1+v}, \quad y = \frac{uv}{1+v}, \qquad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

区域在 (u,v) 空间为 $\frac{3}{4} \le u \le 1,\ 0 \le v \le 1$, 被积函数变为

$$\frac{(x+y)\ln(1+y/x)}{\sqrt{1-x-y}} \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{u^2\ln(1+v)}{(1+v)^2\sqrt{1-u}}.$$

因此积分可分离为

$$I = \int_{3/4}^{1} \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u \cdot \int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}v.$$

计算第二个积分 (令 $t = 1 + v$) 得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+v)}{(1+v)^2}\,\mathrm{d}v = \int_1^2 \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{\ln t + 1}{t}\Big]_1^2 = \frac{1-\ln 2}{2}.$$

计算第一个积分 (令 $s = 1 - u$) 得

$$\int_{3/4}^{1} \frac{u^2}{\sqrt{1-u}}\,\mathrm{d}u = \int_0^{1/4} \frac{(1-s)^2}{\sqrt{s}}\,\mathrm{d}s = 2s^{1/2} - \tfrac{4}{3}s^{3/2} + \tfrac{2}{5}s^{5/2}\Big|_0^{1/4} = \frac{203}{240}.$$

综上

$$I = \frac{203}{240} \cdot \frac{1-\ln 2}{2} = \frac{203(1-\ln 2)}{480}.$$

练习 2 (极坐标变换)**.**

(1) 将积分 $I = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, $D = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 变换为极坐标形式.

(2) 计算 $I = \iint_D (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由 $x + y = x^2 + y^2$ 围成的区域.

(3) 计算 $I = \iint_D \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x,y) : 2 \le \frac{x}{x^2+y^2} \le 4, 2 \le \frac{y}{x^2+y^2} \le 4\}$.

解答 2. (1)

$$I = \int_0^{\pi/4}\int_0^{1/\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{1/\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

(2) 令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$, 则边界由

$$r(\cos\theta + \sin\theta) = r^2 \quad \Longrightarrow \quad r = \cos\theta + \sin\theta,$$

且需 $\cos\theta+\sin\theta\geq 0$，故 $\theta\in[-\pi/4,\,3\pi/4]$. 被积函数 $x+y=r(\cos\theta+\sin\theta)$，雅可比为 r，因此

$$I=\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}\int_0^{\cos\theta+\sin\theta} r(\cos\theta+\sin\theta)\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{3\pi/4}(\cos\theta+\sin\theta)^4\ \mathrm{d}\theta.$$

记 $\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta-\pi/4)$，令 $\phi=\theta-\pi/4$ 得

$$I=\frac{4}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^4\phi\ \mathrm{d}\phi=\frac{8}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\phi\ \mathrm{d}\phi=\frac{8}{3}\cdot\frac{3\pi}{16}=\frac{\pi}{2}.$$

(此题最方便的方式是令 $x=\frac{1}{2}+\cos\theta,\ y=\frac{1}{2}+\sin\theta$)

(3) 令 $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta\ (r>0)$. 条件等价于

$$\frac{\cos\theta}{r}\in[2,4],\qquad \frac{\sin\theta}{r}\in[2,4],$$

所以 $\theta\in(0,\pi/2)$ 且需满足 $\tan\theta\in[1/2,2]$, 即 $\theta\in[\arctan(1/2),\arctan 2]$. 在该区间上以 $\pi/4$ 为界, 利用关于 $\pi/4$ 的对称性 (两段的结构相同), 可将两段合并为两倍一段来简化:

$$I=2\int_{\arctan(1/2)}^{\pi/4}\int_{\cos\theta/4}^{\sin\theta/2}\frac{1}{r^2\cos\theta\sin\theta}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

计算得到

$$I=(\ln 2)^2.$$

练习 3.

(1) 计算 $I=\int_0^1\int_0^1|xy-\frac{1}{4}|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\qquad \iint_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1.$$

证明: 存在 $(\xi,\eta)\in D$, 使得 $|f(\xi,\eta)|\geq I$, I 为 (1) 中的积分值.

解答 3. (1) 直接计算, $I=\frac{3}{32}+\frac{\ln 2}{8}$.

(2) 根据已知条件:

$$\iint_D\left(xy-\tfrac{1}{4}\right)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\tfrac{1}{4}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-0=1.$$

若不存在这样的 $(\xi,\eta)\in D$, 则对任意 $(x,y)\in D$ 都有 $|f(x,y)|<I$. 那么

$$1=\left|\iint_D\left(xy-\tfrac{1}{4}\right)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right|\leq\sup_D|f|\cdot\iint_D\left|xy-\tfrac{1}{4}\right|<I\cdot I=I^2.$$

但由 (1) 中结果 $I^2 < 1$. 矛盾.

练习 4. 计算下列积分

$$I = \iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}V}{\rho^2},$$

其中 ρ 是点 (x,y,z) 到 x 轴的距离, 即 $\rho = \sqrt{y^2+z^2}$. Ω 是一棱台, 它的六个顶点分别为 $A(0,0,1)$, $B(0,1,1)$, $C(1,1,1)$, $D(0,0,2)$, $E(0,2,2)$, $F(2,2,2)$.

解答 4.
(投影法) 积分区域 Ω 在 yz 平面上的投影为梯形 $T = ABED$. 对任意给定的点 $(y_0, z_0) \in T$, 点 (x, y_0, z_0) 随 x 增大, 当 $x = 0$ 时进入 Ω, 当 $x = y_0 \in [0,2]$ 时离开 Ω.

$$I = \iint_T \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \int_0^y \frac{1}{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x = \iint_T \frac{y}{y^2+z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\ln 2.$$

(截面法) 将 Ω 沿 x 向 xoy 平面投影, 每个截面为一等腰直角三角形.

$$I = \int_1^2 \mathrm{d}z \iint_{D_z} \frac{1}{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}y \int_0^y \frac{1}{y^2+z^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln 2.$$

练习 5. 设 $A = (a_{ij})_{i,j=1}^3$ 为实的对称的正定阵, 证明椭球体 $\Omega := \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j \le 1$ 的体积为

$$V = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}.$$

解答 5. 因 A 是 3×3 的实对称正定矩阵, 则存在正交矩阵 Q 和对角矩阵 $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, 其中 $\lambda_i > 0$, 使得

$$A = QDQ^T.$$

做变换

$$x = Qy,$$

则由于 Q 是正交矩阵, 有 $|\det Q| = 1$, 且

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j = x^TAx = (Qy)^TA(Qy) = y^T(Q^TAQ)y = y^TDy = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2.$$

椭球体变为

$$\Omega' = \left\{y \in \mathbb{R}^3 : \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \lambda_3y_3^2 \le 1\right\},$$

该变换下的 Jacobi 行列式为:

$$\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)}\right| = \left|\det Q\right| = 1.$$

因此

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3 = \iiint_{\Omega'} \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2\,\mathrm{d}y_3.$$

令

$$z_i = \sqrt{\lambda_i}\,y_i, \quad i = 1,2,3,$$

即

$$y_i = \frac{z_i}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

该变换的雅可比矩阵为对角矩阵

$$J = \frac{\partial y}{\partial z} = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right),$$

其行列式为

$$|\det J| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} = \frac{1}{\sqrt{\det D}}.$$

注意到 $\det D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det A$, 因此

$$dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}}\,dz.$$

同时，椭球体条件变为

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \le 1,$$

即单位球体 $B = \{z \in \mathbb{R}^3 : \|z\| \le 1\}$. 因此, 椭球体 Ω 的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x = \iiint_{\Omega'} \mathrm{d}y = \iiint_B \frac{1}{\sqrt{\det A}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3\sqrt{\det A}}.$$